Astr. U.
67
m

Astr. U.

67 m Goebel

Ueber

Keplers astronomische Anschauungen und Forschungen.

Ein Beitrag

zur Entdeckungsgeschichte seiner Gesetze

von

Dr. Karl Goebel,

Oberlehrer am Gräflich Stolberg'schen Gymnasium zu Wernigerode.

Festschrift zur Einweihung des neuen Gymnasialgebäudes zu Wernigerode.

Mit 8 Figurentafeln.

Halle,

Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses.

1871.

25/VII Schubl.

118 H

Ueber

Keplers astronomische Anschauungen und Forschungen.

Ein Beitrag

zur Entdeckungsgeschichte seiner Gesetze

von

Dr. Karl Goebel,

Oberlehrer am Gräflich Stolberg'schen Gymnasium zu Wernigerode.

Halle,

Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses.

1871.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Einleitung.

Kurze Entwicklung der kosmischen Anschauung vor Kepler.

Alterthum.

Wie überhaupt die Wissenschaft der Natur durch die beiden Factoren der Beobachtung und der Theorie gebildet wird, so auch die der Sterne, nur dass hier im Verhältniss zu den übrigen Naturwissenschaften die Beobachtung von der Theorie bedeutend überwogen wird. Desshalb können wir, wenn auch den Babyloniern und Egyptern das Verdienst zukommt, das Beobachtungsmaterial für die Astronomie gesammelt zu haben, doch mit gutem Rechte an die Spitze der Entwicklung der kosmischen Anschauung die Systeme der Griechen stellen, die das Material mit selbständigem philosophischen Geiste gestaltet haben. Die griechische Philosophie hat sich mit Vorliebe der Betrachtung des Himmels gewidmet, und es beginnt schon mit der jonischen Philosophie das Streben, ihm seine Geheimnisse abzulauschen. Es sind überhaupt 2 Beweggründe, die die Menschen dazu treiben, den Himmel zu erforschen, das Bedürfniss der Zeitrechnung und die Bewunderung der himmlischen Erscheinungen. Dem kühnen Streben namentlich, das der Bewunderung entstammt, die Plato und Aristoteles für die Mutter der Philosophie halten, hat die Natur den Schleier gehoben, der sie verhüllt. Es sind die Verfinsterungen, deren Beobachtung der erste grosse kosmische Gedanke von der Kugelgestalt der Sterne und der Erde entstammt. Von Thales, dem Vater der jonischen Philosophie, wird berichtet, dass er eine Sonnenfinsterniss vorhergesagt habe; aber derselbe hat auch schon den

Grund der Verfinsterung gekannt, das Dazwischentreten des Mondes als einer dichten erdigen Masse zwischen Sonne und Erde. Es gehören aber nur Anfänge mathematischer Anschauungen dazu, um zu wissen, dass die Kugel der einzige Körper ist, der in allen Stellungen zu einem dritten Körper einen Kreis als Schatten werfen kann, und dass ein cylindrischer Körper nur dann einen kreisrunden Schatten wirft, wenn seine Achse normal zu dem leuchtenden Körper steht. Es musste also die Beobachtung des Mondschattens bei der Sonnenfinsterniss einem mathematischen Auge bald die Ueberzeugung von der Kugelgestalt des Mondes und nach dem Schlusse der Analogie von der Kugelgestalt der andern Sterne aufdrängen. Nun konnte die Verwandtschaft der Masse des Mondes mit der der Erde schon zu der Vermuthung führen, dass diese beiden Körper auch in der Gestalt mit einander verwandt seien, die richtige Erkenntniss aber von dem Grunde der Mondfinsterniss, nämlich dassdabei die Erde zwischen Sonne und Mond zu stehen kommt, und der beständige kreisförmige Schatten der Erde bei dieser Erscheinung gaben die Gewissheit von der Kugelgestalt der Erde. Es ist desshalb dies Schattenbild auch der erste empirische Grund, womit Aristoteles de coelo die Kugelgestalt der Erde beweist. Derjenige aber, der zuerst diese Schlussfolgerung über die Gestalt der kosmischen Körper gezogen hat, ist kein Jonier, sondern wol ein Pythagoreer gewesen. Die jonischen Philosophen haben die Erde zuerst für eine Scheibe, dann für eine Art Trommel und für einen Cylinder gehalten, wo der Durchmesser des Grundkreises sich zur Höhe, wie 3 : 1 verhalte, die Pythagoreer hingegen haben den Gedanken von der Kugelgestalt der Sterne und der Erde eigen. Die Pythagoreische Philosophie ist überhaupt für die Erkenntniss des Kosmos von der grössten Bedeutung. Während die Jonier noch von den Sinneswahrnehmungen beherrscht wurden, bestrebten sich die Pythagoreer mit dem grossartigen Formensinn der Dorier dieselben zu gestalten, und indem sie das Princip der Harmonie, das das staatliche Leben der Derier geformt hatte, auch auf die Natur übertrugen, sahen sie in dem mathematischen Ausdruck der Harmonie, in der

Proportion, den Schlüssel, womit man das Räthsel der himmlischen Erscheinungen lösen könnte. Der Pythagoreer Philolaus hat ein Buch geschrieben, dessen einer Theil über den Kosmos handelte und von dem noch mancherlei Bruchstücke und Auszüge vorhanden sind, die uns über die Pythagoreische Anschauung des Kosmos unterrichten. Stobäus sagt: (eclogg. phys. I, 23. p. 488. Heeren) Philolaus nimmt ein Feuer in der Mitte um's Centrum an, welches er den Herd des Alls nennt und das Haus des Zeus und die Mutter der Götter, den Altar und das Band und das Mass der Natur und wiederum ein besonderes Feuer zu alleroberst, das umfassende; zuerst aber sei von Natur die Mitte, um diese führten den Reigen 10 göttliche Körper, der Himmel (d. i. der Fixsternhimmel), die Planeten, nach diesen die Sonne, unter ihr der Mond, unter diesem die Erde, unter dieser die Gegenerde, nach welchen allen das Feuer des Herdes, das am Centrum seinen Sitz hat. Hiernach haben wir also

1. 10 göttliche Körper: den Fixsternhimmel, die 5 Planeten: Saturn, Jupiter, Mars, Venus, Merkur — die Sonne, den Mond, die Erde und die Gegenerde. Wie ist, fragt es sich, die Vorstellung von der Gegenerde entstanden? Ohne Zweifel aus dem philosophischen System der Pythagoreer, die das Wesen der Dinge in die Zahl setzten und der Zehnzahl eine ganz besondere metaphysische Bedeutung zuschrieben, weil sie sowohl Grundzahl des Zahlensystems ist als auch andere zahlentheoretische Eigenschaften hat, in denen jene theils einen mysteriösen Grund, theils ein bedeutendes Symbol zu erkennen glaubten. Desshalb setzten sie zu den 9 Körpern, die ihnen die Beobachtung zeigte, einen 10ten hinzu, den sie, um seine Verborgenheit zu erklären, unter unsere Erde setzten, so dass diese uns den Anblick desselben entzöge. Das ist eben die Gegenerde. Wir haben 2tens das Centralfeuer, um das diese Körper sich drehen als das Band der Natur, das ihnen ihre Bewegungsräume anweist als das Mass, und ihnen Wärme und Licht gibt als der Altar derselben. Wie ist nun wiederum diese eigenthümliche Ansicht entstanden? Da ist kein anderer Grund aufzufinden als das Bedürfniss, die tägliche Bewegung des

Fixsternhimmels los zu werden und dieselbe aus einer wirklichen in eine scheinbare umzudeuten. Man sah die Ungereimtheit ein, dass der grosse als Ein Ganzes aufgefasste Fixsternhimmel, der am aller entferntesten von der Erde war, sich in Einem Tage um die Erde drehen sollte, während die viel näheren Körper eine unverhältnissmässig längere Umdrehungszeit hatten. Man stellte also einen andern Mittelpunkt des Weltsystems auf, um den zugleich die Erde sich drehte, wodurch die tägliche Bewegung des Fixsternhimmels für uns eine scheinbare wurde, und machte nun mit physikalischem Takte den Mittelpunkt der Bewegung zugleich zur Quelle des durch Licht und Wärme erzeugten organischen Lebens; gerade wie später umgekehrt die Eigenschaft der Sonne, Quelle des organischen Lebens zu sein, ihr zu dem Rechte verhalf, auch als Mittelpunkt der planetarischen Bewegung erkannt zu werden. Während also bei der Aufstellung der Gegenerde der philosophische Gedanke der Wirklichkeit Gewalt anthat, müssen wir das Centralfeuer als die Hypothese einer Speculation ansehn, die die kosmische Bewegung richtig als durch ein bestimmtes directes Verhältniss von Raum und Zeit geregelt betrachtet und kühn genug ist, diesem Gedanken zu Gefallen den eigenen Boden unter den Füssen zu bewegen. Man sieht, wie diese Philosophie sich über die Sinneswahrnehmungen erhebt, wie sie die Kugelgestalt der Weltkörper und deren freies Schweben im Raum und zuletzt sogar die Bewegung der Erde erkennt. Dass eine so kühne Speculation auch über die Wahrheit hinausgieng, kann uns nicht wundern; wie dies geschieht, wenn das Centralfeuer als Altar der Natur betrachtet wird, d. h. als der Herd, auf dem das Licht und Wärme spendende Feuer brennt. Um hiermit die unumstössliche Wahrnehmung von dem Berufe der Sonne in Einklang zu bringen, dachte man sich diese als eine glasartige Kugel, durch die das vom Centralfeuer ausströmende Licht reflectirt oder vielmehr gebrochen wird. Der Anblick des Centralfeuers selbst aber wird uns durch die Gegenerde verdeckt, die in diesem Systeme dieselbe Stellung einnimmt wie in dem Copernikanischen die andere Halbkugel der Erde, d. h. sich immer parallel zur

Erde bewegt. Sie steht daher immer zwischen dem Centralfeuer und der Erde und entzieht dieser den Anblick des Feuers. Eine wirklich bedeutende Anschauung zeigt sich aber in den Bewegungen der Körper um dieses Centralfeuer als das Mass der Natur. Die Erde bewegt sich in Einem Tage um dasselbe, der Mond in Einem Monat, Sonne, Merkur und Venus in Einem Jahre, der Mars in 2, der Jupiter in 12, der Saturn in 30 Jahren. Und der Fixsternhimmel? Dieser wird auch um das Centralfeuer bewegt, wie oben gesagt ist, und die tägliche Bewegung desselben ist durch die tägliche Bewegung der Erde aufgehoben, die man eben desshalb setzte, um das entfernteste Gestirn nicht in der kürzesten Zeit die grösste Peripherie durchlaufen zu lassen. Man hat ihm gewiss als dem entferntesten Himmelskörper die langsamste Bewegung zugeschrieben, deren periodische Zeit über das Zeitmass des äussersten Planeten hinausgeht. Ist diese nun bloss eine fingirte gewesen oder sollte sie die Vorrückung der Tag- und Nachtgleichen sein, deren Periode Hipparch später auf 36000 Jahre berechnete? Diese Bewegung konnte allerdings nur aus der überlieferten Beobachtung von Jahrhunderten erkannt werden, von den Egyptern ist sie aber sicher gekannt und braucht um so weniger dem System der Pythagoreer abgesprochen zu werden, als bei diesen auch andere egyptische Einflüsse, wie in der Seelenwanderung, angetroffen werden. In diesem kosmischen Systeme sind demnach bedeutende Keime für die Erkenntniss der wahren himmlischen Bewegungen enthalten; es musste sich die Bewegung der Erde um das Centralfeuer zur Axendrehung der Erde entwickeln, und an die Stelle des Centralfeuers die Sonne in die Mitte gesetzt werden. Und so ist es auch geschehn. Man verlegte das Centralfeuer in den Mittelpunkt der Erde und gab die Functionen der Gegenerde der andern Hemisphäre unserer Erde; dadurch wurde die Bewegung der Erde um das Centralfeuer in eine Bewegung um ihren Mittelpunct verwandelt, Anfangs in eine vibrirende, dann in eine rotirende, und damit war eine neue grosse Thatsache, die Axendrehung der Erde, gefunden.

Wie ist es aber mit dem andern Fortschritt zur Annahme der Bewegung der Planeten um die Sonne? Dass die Alten diesen Fortschritt zum heliocentrischen System gemacht haben, ist sicher. Archimedes sagt in seinem *ψαμμίτης*: Aristarch von Samos behauptet, dass die Fixsterne und die Sonne unbeweglich verharrten, die Erde aber um die Sonne sich bewege in der Peripherie des Kreises, der in die Mitte der Drehung gesetzt ist. Die Sphäre der Fixsterne aber liege um dasselbe Centrum mit der Sonne und sei von solcher Grösse, dass der Kreis — in dem er die Erde sich bewegen lässt — sich zu der Entfernung der Fixsterne verhalte wie das Centrum der Kugel zur Oberfläche. Eben so berichtet Plutarch in seinem Gesichte im Kreise des Mondes (c. 6), dass Aristarch die Bewegung der Erde um die Sonne hypothetisch aufstellte, Seleukus von Erythrä aber sie bewies.

In dem Verhältniss des Durchmessers der Erdbahn zur Entfernung der Fixsterne, das als das Verhältniss eines Punktes zu einer Fläche angesehen wird, liegt zugleich der Gedanke des unendlichen Raumes. Die ursprüngliche Anschauung der Griechen, dass der Olymp in den Himmel rage, hatte sich bis zum Begriffe der räumlichen Unendlichkeit erhoben.

Zum Urheber der Ansicht von der Axendrehung der Erde sowohl als von deren planetarischer Bewegung macht Gruppe den Plato, aber mit Unrecht. Plato lässt die Erde in der Mitte der Welt ohne Bewegung verharren[1]). Sein Verdienst um die Astronomie beruht nicht auf positiven Errungenschaften, sondern, wie sich später zeigen wird, auf der bildenden Kraft seiner Philosophie.

Dass die Wissenschaft der Alten von der Höhe dieser Theorie wieder herunterstieg und dem geocentrischen Systeme wieder die lange Herrschaft bis in die neue Zeit verschaffte, davon liegt der Grund einerseits in dem Mangel an Hülfsmitteln sowohl der Rechnung als der Beobachtung, durch die man in den Stand gesetzt wäre, das System zu stützen und zu befestigen. Man hatte noch keine feineren Instrumente, um auch geringeren Ungenauigkeiten der Sinneswahrnehmung vorbeugen zu können und noch kein arabisches Ziffernsystem,

um auch verwickelte Zahlenverhältnisse der menschlichen Vorstellung commensurabel zu machen. Andererseits lag der Grund dieses Rückganges in dem Ansehn des Aristoteles, der ohne den grossen Formensinn der Dorier und deren schaffende Phantasie bei den aus der Beobachtung unmittelbar gewonnenen Abstractionen stehn blieb, die Erde als das Schwere in die Mitte und die feurigen Körper als das Leichte in die Peripherie setzte und statt der frei schwebenden Himmelskörper bei den Pythagoreern wieder feste sich drehende Sphären einführte, deren Umschwung jene mit sich herum bewegt. Die Theorie entsprang nicht mehr dem philosophischen oder künstlerischen Bedürfniss nach Einheit und Schönheit und wurde nicht durch grosse Gedanken gebildet, die den Gegenstand intuitiv fassten, um dann durch die Erscheinungen geklärt und befestigt zu werden, sondern durch unmittelbare Abstractionen aus den beobachteten Erscheinungen, denen man schrittweise gerecht zu werden suchte. Wir werden später sehen, wie erst aus der Verbindung von Intuition und Empirie die Wahrheit hervorgieng; doch finden wir in dieser späteren Astronomie der Griechen fruchtbare Keime und bedeutende Andeutungen der Wahrheit. Die Gründe und Grundzüge derselben, des sogenannten Ptolemäischen Systems, sind folgende: Man dachte sich Anfangs die Erde als die Mitte der Welt, um die der Fixsternhimmel und die Planeten, darunter auch Sonne und Mond sich drehten, und zwar in einer Kreislinie mit gleichmässiger Geschwindigkeit. Denn die Kreislinie und die gleichmässige Geschwindigkeit waren, als allein der himmlischen Körper würdig, von der Philosophie gleichsam dogmatisch festgesetzt, und es waren die Voraussetzungen, mit denen man an die Beobachtung der Erscheinungen und der Erforschung ihres Zusammenhanges herantrat. Aber da kam man mit der Beobachtung in Widerspruch, da die Körper nicht gleiche Theile des Kreises oder gleiche Winkel in derselben Zeit dem Auge auf der Erde zu beschreiben schienen. Man half sich, indem man den Kreisen der Planeten einen andern geometrischen Mittelpunkt gab als die Erde und diese gleichsam nur als die von der Natur gebaute Sternwarte betrachtete, auf die die Erscheinungen als

gemeinsamen Beobachtungspunkt bezogen wurden. Auf diese Weise sollte die ungleichmässig erscheinende Bewegung zu einer scheinbar ungleichmässigen gemacht werden, während sie von ihrem geometrischen Mittelpunkte aus beobachtet eben so gleichmässig erscheinen würde, wie sie es in der That wäre. Es sei (Figur I) *t* die Erde, *acbd* die um *t* als vermeintlichen Mittelpunkt construirte Bahn eines Planeten, z. B. des Mars. Bei der Annahme gleichmässiger Geschwindigkeit muss er in der Hälfte der periodischen Zeit seit seinem Erscheinen in der Gesichtslinie *ta* den Bogen $ab = 2R.$, in dem Viertel derselben eben so den Bogen $ac = 1$ R. zurückgelegt haben. Nun erscheint er auch wirklich nach der Hälfte der Zeit in der Linie *tb*, aber nach dem Viertel derselben nicht in der Gesichtslinie *tc* und nach $^3/_4$ derselben nicht in *td*, sondern um $10^1/_2{}^0$ von *c* und von *d* nach *a* zu entfernt, in der Gesichtslinie *te* und *te'*. Man nahm also an, dass er bei seinem Erscheinen in *te* wirklich die Viertelumdrehung gemacht habe, d. h. dass er um den geometrischen Mittelpunkt seiner Bahn einen rechten Winkel beschrieben habe. Dieser Mittelpunkt musste also von *t* in den Punkt der Linie *atb* verlegt werden, in welchem das von e aus darauf gefällte Perpendikel einfällt, nach *m*. Der Planet beschreibt also den Kreis, der mit dem Radius *ta* von *m* aus construirt wird, den Kreis *gefe'*, mit gleichmässiger Geschwindigkeit, die beschriebenen Bogen oder Winkel aber erscheinen dem Auge in *t* auf der Seite *gcd* kleiner, auf der Seite *fcd* grösser als sie in Wirklichkeit sind, während in *g* und *f* die Erscheinung und die Wirklichkeit zusammenfallen; unter der Voraussetzung der Continuität also nimmt die Differenz von *g* nach der Mitte *e* zu, von *e* nach *f* wieder ab; in *e* ist sie also am grössten.

Aber diese Verlegung des Mittelpunktes half dem Widerspruche mit den Beobachtungen noch nicht ab. Es ist klar, dass wenn auch jetzt noch die Construction die wirkliche Bewegung nicht darstellt, sondern die Wirklichkeit und Erwartung nur in *g*, *e*, *f* und *e'* zusammentreffen, die grösste Differenz zwischen beiden sich wiederum in der Mitte dieser Punkte ergeben wird, in den Octanten, in den Durchschnitts-

punkten der Peripherie *gefe'* mit den Halbirungslinien der rechten Winkel, *hmi* und *rmv*, in *h*, *r*, *i*, *v*. In diesen Punkten müsste also der Planet nach Verlauf von Achteln der periodischen Zeit ankommen und dem Auge in *t* müsste er also alsdann in den Gesichtslinien *th*, *tr* u. s. w. erscheinen. Der Mars aber z. B. erscheint nach $^1/_8$ und $^7/_8$ der periodischen Zeit etwa um 9 Minuten näher nach *a* oder *g* und nach $^3/_8$ und $^5/_8$ derselben etwa um 28 Minuten entfernter von *f* oder *b*. Entweder bewegt sich also der Planet nicht gleichmässig um *m*, oder *m* ist nicht der Mittelpunkt der Kreisbahn, von dem aus die wirklich beschriebenen Bogen gemessen werden müssen. Da nun aber der Planet um diesen Punkt in den Vierteln der periodischen Zeit auch richtige Viertelumdrehungen beschreibt, wesshalb man eben *t* als Mittelpunkt aufgegeben, so blieb man dabei stehn, dass um diesen Punkt die Bewegung gleichmässig wäre und also auch in den Achteln der periodischen Zeit Achtel-Umdrehungen gemacht würden, der Planet wäre also in diesen Zeitpunkten wirklich in den Linien *mh*, *mv* u. s w., aber nicht in den Punkten *h*, *v* u. s. w., sondern man müsste z. B. den Punkt *h* auf der Linie *ht* so weit herunterschieben nach *q* . ., dass die wirkliche Gesichtslinie von der Erde nach dem Planeten *tq* mit der erwarteten Gesichtslinie *th* den Winkel von 9' bildete; d. h. man müsste den Mittelpunkt von *m* nach *t* zu verlegen, es sei nach *m'*, und von hier aus einen Kreis mit dem Radius *mg* schlagen *nqsop*; schnitte dieser die Linie *mh* in *q* so, dass $htq = 9'$, so wäre die richige Bahn des Mars construirt. Der Punkt *m*, um den der Planet in gleichen Zeiten gleiche Winkel beschreibt, ist das punctum aequans oder aequalitatis. Während *m'* der geometrische Mittelpunkt der Bahn ist, ist dieser Punkt *m* der physikalische Mittelpunkt der Bewegung; jener Punkt bestimmt die Oerter im Raum, die der Planet durchläuft, dieser die Zeit, in der er sie durchläuft, jener die Symmetrie der Figur, dieser den Rhythmus der Bewegung; die Erde aber ist der ruhende Pol in allen Bewegungen, der Beobachtungspunkt, von wo aus die Bewegungen mit einander verglichen und mit einheitlichem Masse gemessen werden können. Man sieht, es ist eine zusammengesetzte Mechanik,

durch die die erste Ungleichheit der Bewegung, wie man die aus der Stellung des Planeten zum Fixsternhimmel beobachteten Erscheinungen nennt, erklärt wird. Noch verwickelter aber wird diese Mechanik durch das Bedürfniss, die zweite Ungleichheit oder die aus der Stellung des Planeten zur Sonne beobachteten Erscheinungen zu erklären. Die oberen Planeten nämlich: Mars, Jupiter und Saturn erscheinen in gleicher Richtung mit der Sonne sich bewegend, von Westen nach Osten, wenn die Sonne sich ihnen nähert; bewegt sich hingegen die Sonne in den dem Orte der Planeten entgegengesetzten Zeichen, so scheinen sie rückwärts von Osten nach Westen zu gehn. In jenem Falle scheint zugleich die Bewegung rascher und der Durchmesser des Planeten kleiner, in diesem umgekehrt die Bewegung langsamer und der Durchmesser grösser. Zur Erklärung dieser Erscheinung erfand man den Epicycel. Man liess nämlich nicht den Planeten sich selbst auf jenem excentrischen Kreise, der der ersten Ungleichheit Genüge that, bewegen; sondern auf diesem bewegte sich der Mittelpunkt eines kleineren Kreises, auf dessen Peripherie dann der planetarische Körper den Sonnenkreis nachahmend sich drehte.

Es sei 2) (Fig. II) *oo'* der eccentricus des Planeten mit dem Mittelpunkt *m*, *kk'* der Kreis der Sonne mit dem Mittelpunkt *c*, *t* die Erde. Auf *oo'* bewegt sich der Mittelpunkt des Epicycels μ, μ' in der Richtung des Pfeiles, auf der Peripherie des Epicycels in derselben Richtung der Planet selbst. Da in der Nähe der Sonne der Planet kleiner erscheint, so muss er alsdann in der Erdferne und da er umgekehrt in den der Sonne entgegengesetzten Orten grösser erscheint, alsdann in der Erdnähe sich befinden. Es sei also zunächst der Planet mit der Sonne in Conjunction, *s* der Ort der Sonne, alsdann befindet sich der Planet in der Erdferne auf seinem Epicycel in *p*: der Mittelpunkt μ und der Planet *p* bewegen sich in derselben Richtung nach *x* vorwärts wie die Sonne *s*, und da der Planet sich mit der Summe der Geschwindigkeit des Mittelpunktes μ und seiner eigenen auf dem Epicycel vorwärts bewegt, so ist seine Ortsveränderung rascher. Ist hingegen der Planet mit der Sonne in Oppo-

sition, s' sei der Ort der Sonne, so ist der Planet, weil er alsdann grösser erscheint, in der Erdnähe, in p'. Alsdann bewegt sich der Mittelpunkt μ' mit der Sonne vorwärts nach y zu, der Planet selbst aber auf dem Epicycel von p' nach x' zu in der entgegengesetzten Richtung; und da nun die eigene Bewegung auf dem Epicycel schneller ist als die des Mittelpunkts des Epicycels, so muss die Bewegung rückwärts erscheinen, der Planet scheint die schon durchmessenen Sternzeichen rückwärts wiederum zu durchmessen, aber nur mit der Differenz der eigenen Schnelligkeit und der des Mittelpunktes μ'; wesshalb diese rückläufige Bewegung langsamer erscheint. Man sieht hieraus zugleich, dass der Mittelpunkt des Epicycels, der den eccentricus beschreibt, und der Planet dem Auge auf der Erde nur dann in derselben Gesichtslinie erscheinen, wenn der Planet in der Erdennähe oder Erdenferne des Epicycels sich befindet und dass man die Lage des eccentricus zum Fixsternhimmel nur durch Beobachtung des Planeten in dieser bestimmten Constellation finden kann. Es fragt sich also, woraus wir erkennen können, dass Erde oder Auge, Planet und Mittelpunkt des Epicycels in Einer geraden Linie sich befinden. Wir haben es in der Figur der Einfachheit und Veranschaulichung wegen so gezeichnet, als ob das dann der Fall wäre, wenn der Planet mit der Sonne selbst gerade in Conjunction oder Opposition ist. Nach Ptolemäus ist das aber dann der Fall nicht, wenn die Sonne selbst, sondern wenn derjenige Punkt des Sonnenkreises mit dem Planeten in Conjunction oder Opposition steht, den die Sonne einnehmen würde, wenn sie sich gleichmässig um die Erde bewegte, also wenn ihre Bahn nicht excentrisch wäre. Das Verfahren also die Lage des eccentricus zu finden war das, dass man 1. beobachtete, wann der Planet und die Sonne in Opposition mit einander standen — denn die Conjunction kann man nicht gut beobachten. — Man nennt diese Beobachtungen die akronychischen, weil sie an den Grenzen der Nacht gemacht werden mussten, bei Sonnenuntergang oder Sonnenaufgang, denn bei dieser Configuration geht der Planet auf, wenn die Sonne untergeht und umgekehrt, bei der Conjunction geht der Planet mit der

Sonne auf und unter, wesshalb sie eben nicht gut beobachtet werden kann. Es sei dies geschehen; *t* sei die Erde (Fig. III), *s* der wirkliche Ort der Sonne, der Planet stehe auf seinem Epicycel in *p* mit der Sonne in Opposition, *stp* also eine gerade Linie; alsdann steht der Planet nicht in der eigentlichen Erdennähe des Epicycels oder die Linie *tp* geht nicht durch das Centrum des Epicycels und schneidet den eccentricus nicht in μ, sondern es muss nun

2. aus dieser Beobachtung durch Rechnung festgestellt werden, wann und wo der Punkt der Sonnenbahn in Opposition mit dem Planeten steht, welcher der mittleren Bewegung der Sonne um die Erde entspräche. Man verbinde *s* mit *m*, dem Mittelpunkte der Sonnenbahn, und ziehe von *t* aus eine Parallele *tn* mit *ms*, alsdann steht der Planet p', wann er in der Richtung dieser Linie *tn* sich befindet, zugleich in derselben Gesichtslinie mit dem Mittelpunkte des Epicycels μ' oder die Linie ntp' gibt auch den Ort der ersten Ungleichheit an. Da der Kreis durch 3 Punkte bestimmt ist, so lässt sich hiernach durch 3 akronychische Beobachtungen und daraus gemachte Combinationen der eccentricus construiren.

Man sieht, wie man durch geometrische Configurationen den kosmischen Erscheinungen beizukommen suchte. Die Sache hat offenbar etwas Wunderbares. Schon das würde wunderbar sein, wenn der Planet gerade immer in der Conjunction und Opposition mit der Sonne die 2te Ungleichheit aufgäbe und sich mit der Erde und dem Mittelpunkte seines Epicycels in Eine gerade Linie stellte, noch wunderbarer aber wird es dadurch, dass dies der Planet thun soll, wenn er mit einem ideellen Punkte jene Configurationen eingeht. Der Planet, äussert sich Kepler richtig, müsste eigentlich Mathematik verstehen, um diese ideellen geometrischen Kategorien sich vorstellen zu können. Dazu kam noch, dass auch diese künstliche Bewegung den Erscheinungen noch nicht genügte, und man wol noch einen zweiten Epicycel aufgesetzt hat. Aber in der Ptolemäischen Theorie der ersten Ungleichheit sind die Keime zweier wichtigen Wahrheiten enthalten, die eine in der Excentricität, in der die elliptische Bahn der Planeten, die andere in dem punctum aequans, in

dem die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Entfernung des bewegten und des Centralkörpers von einander und damit die stetige Veränderung der Bewegung angedeutet ist

Was nun die Vorstellung der Alten von den Ursachen der Bewegung betrifft, so haben sie sich dieselben im Allgemeinen seelischer oder geistiger Natur gedacht. Im Philolaischen System galten die Körper für göttliche Wesen, Plato schreibt der Welt und jedem einzelnen Weltkörper eine Seele zu, Aristoteles lässt die Fixsternsphäre durch den *νοῦς* bewegt werden, welche Bewegung dann durch Uebertragung den übrigen Sphären sich mittheilt. Bei Ptolemäus, haben wir gesehn, ist die Sache nicht anders zu denken als dass die Planeten eine Vorstellungskraft haben. Bei Plutarch jedoch in seiner Schrift über das Gesicht des Mondes finden wir eine Vergleichung der Mondbewegung mit der Bewegung eines Steins durch eine Schleuder, bei der der Stein zwar strebt, sich von der Hand zu entfernen, der Riemen aber diese Entfernung hindert und den Stein in der Kreisbahn um die Hand herum festhält. Es ist dies die richtige Anschauung von der Tangential- und Centripetalkraft. Aber es ist diesem Gedanken gegangen, wie dem der Heliocentricität. Ein scharfsinniger Kopf erdachte ihn, aber in das Bewusstsein des Volkes oder nur der Zunft gieng er nicht über. Die wissenschaftlichen Hülfsmittel genügten noch nicht, um den Gedanken streng zu beweisen und consequent durchzuführen und so den Augenschein und die Ueberlieferung zu überwinden.

Neuere Zeit.

Was im Mittelalter von Kenntniss der Sterne vorhanden war, waren Nachklänge des Alterthums. Aber es war sehr wenig. Sollte die kosmische Anschauung sich fortentwickeln, so musste dieselbe erst wieder auf den Standpunkt erhoben werden, den sie durch die Griechen eingenommen hatte: Damit beginnt dann auch die Erneuerung der astronomischen Wissenschaft, durch die Deutschen, die dieselbe in dem Anfange der allgemeinen Erneuerung des geistigen Lebens sogleich mit dem grössten Eifer betrieben. Die grossen Ereignisse, die die neue Zeit einleiten, die Entdeckungen und die Reformation, die Erweiterung der Anschauungen und der Lebensbasis der Völker und die Vertiefung des innern Lebens, haben ihren gemeinschaftlichen Grund in der Erweckung der klassischen Studien, deren hauptsächliche Träger bald die Germanen geworden sind. Und wenn auch die Ausführung der Entdeckungen der Ruhm der romanischen Stämme ist, so ist doch die dazu nothwendige geistige Vorarbeit, die Erkenntniss der Sterne, die die oceanische Schifffahrt erst möglich machte und dem Muthe und der Thatkraft dieses Feld grosser und fruchtbringender Thätigkeit eröffnete, das Verdienst der Deutschen. In den Deutschen leben eigentlich die Griechen ihr unsterbliches Dasein. Die Bedeutung aber der klassischen Studien für die Astronomie war eine zwiefache. Auf der einen Seite waren es die positiven Errungenschaften der Griechen in dieser Wissenschaft, auf der andern Seite die bildende Kraft ihrer Literatur, vor allem ihrer Philosophie, wodurch diese Wissenschaft erneuert wurde. Die Resultate der alten Astronomie wurden namentlich durch Aristoteles und des Ptolemäus *μεγάλη σύν-*

ταξις, d. h. grosses System, oder wie es gewöhnlich mit arabischem Namen genannt wird, Almagest, vermittelt, die philosophische Bildung schöpfte man namentlich aus dem Plato. Diejenigen Männer aber, welche den echten Aristoteles und den Ptolemäus studirt und deren Ueberlieferungen wieder zum lebendigen Eigenthum der Gelehrten gemacht haben, sind namentlich Peurbach und Regiomontanus, der deutsche Archimedes, wie wir ihn nach Hutten nennen könnten. Noch abhängig von den Alten, doch zugleich mit selbständiger Speculation war Kopernikus, die freie durch die Philosophie gebildete wissenschaftliche Schöpferkraft stellt sich in Kepler dar.

Peurbach 3) verschmolz die Ueberlieferung des Ptolemäus und des Aristoteles mit einander, und setzte die Aristotelische Sphärentheorie mit der geometrischen Configuration des eccentricus und des Epicycels bei Ptolemäus zusammen. Nimmt man nämlich an, dass die Planeten sich mit Hülfe fester kreisförmiger Sphären oder Scheiben drehen, so kann man sich diese Drehung nicht gut anders vorstellen, als dass sie um den Mittelpunkt der Scheibe geschieht, also in einem concentrischen, nicht in einem excentrischen Kreise. Nun ergeben sich dieselben Erscheinungen, ob man den Planeten auf einem zur Erde excentrischen Kreise sich drehen lässt oder ob man einen concentrischen Kreis mit demselben Radius annimmt und auf diesem den Mittelpunkt eines Epicycels sich bewegen lässt, dessen Radius gleich der Excentricität des eccentricus ist, und auf dem dann der Planet in entgegengesetzter Richtung sich so bewegt, dass er mit dem Mittelpunkt des Epicycels in derselben Zeit ähnliche Bogen beschreibt. Es sei (Fig. IV) *ab* der eccentricus mit der Excentricität *tm*. Nun construire man einen concentricus um die Erde *t* mit dem Radius *am*, *a' b'*, und setze auf diesen den Epicycel *ff'*, dessen Radius $a' f = tm$. Bewegt sich alsdann der Mittelpunkt des Epicycels *a'* in der Richtung des Pfeiles von *a'* nach *c''*, der Planet selbst aber in der entgegengesetzten von *f'* nach *f* in der Richtung des andern Pfeiles so, dass, wenn *a'* eine halbe Umdrehung nach *b'* gemacht hat, der Planet auf seinem Epicycel auch eine halbe

Umdrehung von f' nach f gemacht hat, kurzum, dass der Planet um den Mittelpunkt des Epicycels a' und dieser Mittelpunkt um die Erde t in derselben Zeit immer gleiche Winkel beschreiben, so bietet diese Bewegung dem Auge in t ganz dieselben Erscheinungen wie dort bei dem eccentricus, die Anomalieen, d. h. die vom Planeten beschriebenen Winkel, und desshalb die Oerter unter dem Fixsternhimmel sind zu derselben Zeit immer dieselben. Der Planet sei zu gleicher Zeit in a und in f. Er bewege sich im eccentricus von a nach c und beschreibe um m eine Viertelumdrehung $= 90^0$; dann erscheint seine Bewegung dem Auge in t unter dem Winkel atc. Ebenso beschreibe auf dem concentricus der Mittelpunkt des Epicycels den Winkel von 90^0 $a' ta''$, wäre der Planet in f ohne eigene Bewegung mit fortgewälzt, so würde er in f'' erscheinen, da er aber ebenfalls um a' einen Winkel von 90^0 nach c' hin in dieser Zeit beschrieben hat, so erscheint er in c'' und seine Bewegung in dieser Zeit dem Auge in t unter dem Winkel ftc''. Dieser Winkel ist aber $=$ dem Winkel atc. Denn der $\sphericalangle$ $atc = R - tcm$ und der $\sphericalangle$ $ftc'' = R - a''\ tc''$. Da nun das Dreieck $cmt \cong \Delta\ a''\ tc''$ ist — denn ta'' ist $= mc$ und $a''\ c'' = mt$ aus der Voraussetzung und $\sphericalangle$ $c''\ a''\ f''$ oder $c''\ a''\ t = cmt$ als $R -$ so ist auch der $\sphericalangle$ $tcm = \sphericalangle$ $a''\ tc''$ und also auch $\sphericalangle$ $atc = \sphericalangle$ ftc''. Eben so ist auch die Entfernung des Planeten $tc'' = tc$; also sind die Erscheinungen in beiden Fällen dieselben. Der Beweis, der hier für die excentrische Anomalie $= 90^0$ gegeben ist, lässt sich leicht verallgemeinern, wenn man nur bedenkt, dass die Linie, welche den Mittelpunkt des Epicycels mit dem Orte des Planeten auf dem Epicycel verbindet, sich immer parallel zu sich bewegt, weil jener Mittelpunkt und der Planet immer ähnliche Bogen in derselben Zeit beschreiben. Hier dient also der Epicycel der ersten Ungleichheit, wie wir das auch bei Kopernikus sehn werden, während er bei Ptolemäus der zweiten dient.

Peurbach construirte sich die Sache nun so. Er legte um die Erde 2 concentrische Sphären, eine innere mit dem Radius gleich der Differenz des Radius des eccentricus und der Excentricität und eine äussere mit dem Radius = der

Summe dieser beiden Grössen, und dachte sich den Zwischenraum zwischen diesen beiden Sphären durch einen Rand ausgefüllt, dessen Dicke also gleich dem Durchmesser des Epicycels war und auf dem der Planet seinen Kreis beschrieb. So erstanden die Sphären wieder und sind auch in das System des Kopernikus gekommen.

Kopernikus ist zur Aufstellung eines neuen Systems wol besonders durch die Ideen bewogen worden, die er aus den Alten geschöpft hatte. „Zuletzt," sagt Joachimus Rheticus in seiner Beschreibung der Kopernikanischen Weltordnung, „bewog dies hauptsächlich meinen Lehrer, den Kopernikus, weil er als Grund der Unsicherheit in der Astronomie vorzüglich diesen sah, dass die Astronomen ihre Theorieen und Methoden, die Bewegungen der Himmelskörper zu erklären, zu wenig streng nach jener Regel bemassen, welche fordert, dass die Ordnungen und Bewegungen der Himmelskörper ein absolutes System bilden. Denn so sehr wir jene auch ehren mögen, wäre es dennoch zu wünschen gewesen, dass sie in der Festsetzung der Harmonie der Bewegungen die Musiker nachgeahmt hätten, welche nach dem Massstabe einer Saite die Töne aller übrigen so lange mit der grössten Sorgfalt stimmen, bis alle zugleich die erwünschte Consonanz geben und bei keiner irgend eine Dissonanz bemerkt wird." Es sind namentlich die Ideen der Einheit und der Einfachheit der Natur, die auch schon der Philosophie der Alten sich als Bedürfniss aufgedrängt hatten und auch Kepler's Speculation bestimmt haben, der im mysterium cosmographicum sagt: „Sie (die Natur) liebt die Einfachheit, sie liebt die Einheit, niemals ist ihr etwas müssig oder überflüssig, wohl aber wird eine Sache oft von ihr für viele Wirkungen bestimmt." Ja, Newton hat diese Idee sogar zu einem naturphilosophischen Axiom erhoben. Schon aus dieser Idee heraus konnte Kopernikus auf den Gedanken kommen, die Ursache des organischen Lebens, die Quelle von Licht und Wärme, auch zum Mittelpunkt der planetarischen Bewegung zu machen, wie er denn dieses Zusammenstimmen zu einer wesentlichen Stütze seiner Hypothese macht. Aber es kam dieser Richtung und Stimmung seiner Gedan-

ken die dunkle Ueberlieferung von dem heliocentrischen System oder wenigstens von der Bewegung der Erde bei den Alten zu Hülfe. In seinem Briefe an den Papst Paul III. sagt er: Ich habe beim Cicero gefunden, dass zuerst Nicetas (muss heissen Hicetas) gemerkt hat, dass die Erde sich bewege. Nachher fand ich auch beim Plutarch, dass einige andere dieselbe Meinung gehabt haben, dessen Worte, damit sie allen bei der Hand sind, ich hierher schreiben will. Folgen die Worte. Die Uebersetzung der Worte lautet: die andern nehmen an, dass die Erde feststehe, der Pythagoreer Philolaus aber, dass sie im Kreise um das Feuer in einem schiefen Kreise auf gleiche Weise wie Sonne und Mond sich herumbewegt. (Ueber das Folgende siehe hinten Anm. 4.) Daher also habe auch ich Veranlassung genommen und an die Beweglichkeit der Erde zu denken angefangen. Er hielt in Folge der Stelle des Plutarch das heliocentrische System für die Lehre des Philolaus, der aber, wie wir gesehn und auch die Stelle besagt, die Erde nicht um die Sonne, sondern um das Centralfeuer bewegte. Wäre diese falsch verstandene Stelle wirklich die Veranlassung zu seiner heliocentrischen Weltordnung, so hätte ein Irrthum eine bedeutende Wahrheit in seinem Gefolge gehabt und wäre ein Haupthebel für den Fortschritt des menschlichen Geistes geworden. Aber auch sonst gibt es solche heilbringende Irrthümer; wie z. B. zur Entdeckung Amerikas der Irrthum wesentlich beigetragen hat, dass der äusserste bekannte Theil Asiens nur etwa um $^1/_3$ des Erdumfangs von den Azoren nach Westen zu entfernt wäre.

Kopernikus liess also die Sonne ruhn und die Erde sich bewegen. Dadurch machte er die 2te Ungleichheit, die durch die Stellung der Planeten zur Sonne bedingten Bewegungen, zu einer scheinbaren, und es blieb ihm nur die erste Ungleichheit zu erklären übrig. Hierbei blieb er theils von den Alten abhängig, theils schlug er seinen eigenen Weg ein. Er gieng von der Voraussetzung aus, dass die Bewegung des Planeten eine um den Mittelpunkt gleichmässige sein müsse und tadelt desshalb den Ptolemäus, dass er durch Annahme eines besondern punctum aequalitatis die Geschwin-

digkeit der Planeten zu einer ungleichmässigen gemacht hätte. Denn es beschreibe (Fig. V) der Planet nicht um den Mittelpunkt m, sondern um einen von der Erde t in derselben Richtung weiter entfernten Punkt a in gleicher Zeit gleiche Winkel, und es sei $dae = fag$, so legt er auf dem eccentricus in gleicher Zeit die Bogen ed und fg zurück; jener Bogen misst den $\sphericalangle dme$, dieser den Winkel fmg; es ist aber $dme < dae$, weil er die Schenkel von dae umschliesst, hingegen $fmg > fag$, weil jener von diesem umschlossen wird. Der Planet legt also dort einen kleineren, hier einen grösseren Bogen in derselben Zeit zurück; seine Geschwindigkeit ist also ungleichmässig, sie ist in der Nähe des Apogäums geringer, in der des Perigäums grösser; sie nimmt von dort bis hierhin eben stetig zu, alsdann von hier bis dorthin wieder stetig ab. Da also diese ungleichmässige Geschwindigkeit der Anschauung des Kopernikus widersprach, gab er das punctum aequans und wol desshalb, weil Sphären nur in concentrischen Kreisen sich drehend vorgestellt werden können, die Excentricität auf, und um die durch diese Configurationen erklärte Ungleichheit der Bewegung nun von seinen Prämissen aus zu erklären, construirte er die Mechanik der himmlischen Bewegungen folgendermassen: Es sei (Fig. VI) der Kreis mit dem Mittelpunkte m der Ptolemäische eccentricus und a das punctum aequans, dessen Entfernung von der Erde t sich zu der Entfernung des Mittelpunktes m von t bei Ptolemäus immer wie $2 : 1$ verhält. Kopernikus liess nun den Kreis m bestehn, halbirte aber die Entfernung ma, es sei in i, setzte dann einen Epicycel auf den Kreis mit dem Radius $= ti$, den Epicycel μ, und auf diesen einen zweiten kleineren mit dem Radius ia, den Epicycel μ'. Der erstere Epicycel oder vielmehr der Mittelpunkt μ' bewegt sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie der Hauptkreis oder vielmehr der Mittelpunkt μ, aber in entgegengesetzter Richtung von Ost nach West, der Planet selbst aber auf dem kleinen Epicycel bewegt sich mit der doppelten Geschwindigkeit, aber in derselben Richtung wie der Hauptkreis oder μ von Westen nach Osten. Es möge die Bewegung vom Apogäum oder Aphelium beginnen, wo alle bedeutenden Punkte m, μ, μ' und der Planet p

— denn an diesem Orte des Epicycels, nicht in φ befindet sich bei dieser Constellation der Planet — sich in Einer geraden Linie befinden. μ mache nun eine Viertelumdrehung nach μ^2, alsdann würde μ', wenn es ohne eigene Bewegung mit fortrollte, sich in ν befinden, da es aber auch für sich eine Viertelumdrehung in entgegengesetzter Richtung gemacht hat, befindet es sich in μ''; der Planet aber würde, wenn er nur mit μ fortrollte, in π sein, wenn mit μ und μ', in π', da er aber auf seinem Epicycel zugleich selbst 180 ^{0} beschrieben hat, ist er in p'. Die Bewegung vom Apogäum oder Aphelium an in $^1/_4$ der periodischen Zeit erscheint also dem Auge in m unter dem Winkel $\mu' mp'$, der nahezu = dem Winkel ist, unter dem die Bewegung in derselben Zeit nach der Ptolemäischen Construction dem Auge in t erscheint $= \sphericalangle \mu tc$, wo $\mu ac =$ der anomalia media von 90 ^{0}, die dem Viertel der periodischen Zeit entspricht. Die Entfernung des Planeten von $m = p' m$ ist jedoch merklich verschieden von der entsprechenden Entfernung des Planeten bei Ptolemäus tc. Da Kopernikus an die Stelle, die die Erde im Ptolemäischen System einnimmt, die Sonne setzt, so sollte man erwarten, dass den ruhenden Mittelpunkt m, um den die Maschinerie sich herumdreht, eben die Sonne bei ihm einnähme. Dem ist aber nicht so; sondern, da er die Ptolemäischen Zahlenverhältnisse mit herübernahm und Ptolemäus, wie wir gesehn, die Lage des eccentricus und dessen Excentricität nicht aus der Opposition des Planeten mit dem wirklich erscheinenden Orte der Sonne, sondern mit dem fingirten Punkte bestimmte, der der mittleren Bewegung der Sonne um die Erde entsprechen würde, so bezog auch Kopernikus die Bewegungen nicht auf die Sonne selbst, sondern auf den Mittelpunkt des Kreises, den die Erde bei ihm beschreibt oder des orbis magnus, der für die Sonne ein excentrischer ist, und er bestimmt die Planetenbahnen nicht aus den Oppositionen der Planeten mit der Sonne, sondern aus den Oppositionen derselben mit dem Mittelpunkte der Erdbahn. Dieser Mittelpunkt ist es, um den seine Maschinerie sich dreht. In Figur VII sei nn' der Kreis der Erde, dessen Mittelpunkt m, s die Sonne, OO' der concentricus des Planeten. Da die Erde auf nn' sich fortwährend

bewegt, so sehn wir den Planeten an seinem wahren Orte unter dem Fixsternhimmel nur dann, wenn die Erde, der Planet und der ruhende Punkt, für den die wirkliche und erscheinende Winkelbewegung zusammenfallen, in Einer geraden Linie sich befinden. Als diesen Punkt nahm nun Kopernikus den Mittelpunkt der Erdbahn *m* an. Er beobachtete also die Opposition des Planeten *p'* mit der Sonne *s* und berechnete dann aus dem Verhältnisse der Geschwindigkeit des Planeten und der Erde, wann und in welchen Zeichen der Planet *p*, die Erde *t* und der Punkt *m* in Einer geraden Linie gestanden hätten oder stehen würden; alsdann war die Projection des wahren Ortes des Planeten auf die Fixsternsphäre gefunden und durch 3 solcher gefundener Punkte die Lage des Kreises zur Fixsternsphäre bestimmt. Obgleich daher Kopernikus die Masse der Sonne als ruhend in die Mitte der planetarischen Bewegung hineinsetzte, war sie doch nur gleichsam ein Leuchtthurm zur Orientirung der Bewegung; der geometrische Mittelpunkt und Indifferenzpunkt der planetarischen Bewegung war der ideelle Punkt *m*.

Der grosse Fortschritt, den die Wissenschaft durch Kopernikus machte, besteht eben in der Erkenntniss von dem Stillstande der Sonne und der Bewegung der Erde, in der völligen Umkehr der Weltordnung, dem Siege des Gedankens über die Täuschung der Sinne. Aber auch in seiner himmlischen Mechanik sind noch 2 Momente nicht ohne Bedeutung für die Fortentwicklung der Wissenschaft gewesen. Das eine ist, dass er das punctum aequans und den Mittelpunkt wieder zusammenlegte und durch Einen Punkt sowohl die Räume, die der Planet beschreibt, als die Zeiten, in der er dieselben beschreibt, bestimmt werden lässt. Das Wichtigere jedoch ist, dass er das philosophische Vorurtheil von der Kreisbahn der Planeten fallen lässt. Denn es habe (Fig. VI) der Planet den Weg von *p* nach *p'* zurückgelegt, nachdem μ eine Viertelumdrehung gemacht. Schlage ich nun mit $ap = m\mu$ einen Kreis, so liegt auf diesem Kreise zwar *p* und ebenso der Ort des Planeten im Perigäum, aber nicht *p'*; denn da $\mu^2 \pi' =$ und $\parallel ma$, so ist auch $a\pi' = m\mu^2 = m\mu = ap$, desshalb trifft der mit *ap* geschlagene Kreis den kleinen

Epicycel in π', und $\pi' p'$ ist senkrecht auf dem Radius $a\pi'$, also Tangente an diesen Kreis; p' liegt also ausserhalb des Kreises, und der Planet biegt vom Kreise aus.

Die Kopernikanische Weltordnung hatte aber einen grossen Feind zu besiegen; ich meine nicht die katholische Kirche oder vielmehr die katholische Scholastik, die auf den Aristoteles schwur und den bedeutendsten Anhänger des Kopernikus unter den Romanen, Galilei, zum Widerrufe zwang; sondern den grossen Beobachter Tycho de Brahe, der hauptsächlich wol aus religiösen Bedenken die Erde wieder ruhend setzte, die übrigen Planeten aber sich um die Sonne und mit dieser um die Erde bewegen liess. Die Mechanik ist sonst dieselbe wie bei Kopernikus, der concentrische Kreis mit dem grösseren Epicycel für den Ptolemäischen eccentricus und der kleinere Epicycel für das punctum aequans. Es ist dies ein System, das den Erscheinungen auch Genüge thut. Kepler vergleicht das Kopernikanische mit einem Cirkel mit verschiedenen beweglichen Schenkeln, die um den einen feststehenden Schenkel verschiedene Kreise beschreiben, während das Tychonische anzusehn ist, als ob dieser Cirkel mit verschiedenen Schenkeln auf einer drehbaren Scheibe befestigt wäre, die sich dann um den Schenkel als ruhenden dreht, der bei Kopernikus den Kreis der Erde beschreibt. Das Verhältniss des Tychonischen zum Ptolemäischen System ist aber das, dass Ptolemäus die Epicycel auf die eccentrici setzte, Tycho aber die eccentrici auf den Einen Epicycel, nämlich den Kreis der Sonne.

Vergleichen wir die 3 Systeme durch Beispiele mit einander.

1. Es sei Fig. VIII $mqll'$ die Bahn der Erde nach Kopernikus, a die Sonne, m der Mittelpunkt, der zugleich punctum aequans ist. Ptolemäus setzte also an die Stelle der Sonne in a die Erde. Die Bewegungen, die bei Kopernikus die Erde wirklich macht, macht die Sonne dann zu gleicher Zeit scheinbar; und zwar ist ihr scheinbarer Ort unter der Fixsternsphäre immer um 180^0 von dem entsprechenden wirklichen Orte der Erde entfernt. Ist bei Kopernikus die Erde im Aphelium q, so scheint die Sonne auch im Apogäum zu sein, aber 180^0

von q entfernt, und umgekehrt. Die Entfernung der Erde von der Sonne im Aphelium also qa muss man auf die andere Seite von a legen, um das scheinbare Apogäum des Ptolemäus zu bekommen, und die Entfernung der Erde im Perihelium $q'a$ ebenfalls auf die frühere Seite von qa; d. h. man muss $a\mu = am$ nehmen und von μ einen neuen Kreis mit dem alten Radius schlagen, der den alten Kreis in l und l' schneidet $\mu\varphi ll'$, um die Bahn der Sonne bei Ptolemäus und Tycho zu construiren. Ist die Erde nach Kopernikus in q, so ist die Sonne nach Ptolemäus und Tycho in φ, ist jene in q', so ist diese in φ', ist jene in l, so diese in l' und umgekehrt. Die Erscheinungen auf dem eccentricus sind in beiden Fällen dieselben. Hat sich die Erde von q nach p gedreht, so die Sonne zu gleicher Zeit von φ nach π; die anomaliae mediae qmp und $\varphi\mu\pi$ sind gleich; ebenso die anomaliae coaequatae qap und $\varphi\alpha\pi$, wie leicht zu sehn.

2. Es sei r der Ort eines Planeten auf seinem eccentricus. Nach Kopernikus sehn wir denselben von der Erde dann ohne Parallaxe, d. h. wie er dem ruhenden Auge im Centrum der Bewegung erscheint, wenn sich die Erde mit ihm und dem Mittelpunkt der Erdbahn m in Einer geraden Linie befindet, wenn also mtr Eine Gerade. Nach Ptolemäus aber beobachten wir dann diesen wahren Ort des Planeten von der Erde a aus, wenn die Erde a, der Planet und der dem erscheinenden Orte der Sonne entsprechende mittlere Ort derselben in Einer Geraden liegen. Diesen mittleren Ort finden wir so. Ist bei Kopernikus die Erde in t, so ist der erscheinende Ort der Sonne in σ; verbindet man nun σ mit μ und zieht von a aus mit $\sigma\mu$ eine Parallele $\alpha\nu$, die den Ptolemäischen eccentricus in ν trifft, so ist ν der gesuchte Ort der mittleren Bewegung der Sonne, d. h. der Ort, den die Sonne einnehmen würde, wenn sie sich gleichmässig um die Erde selbst bewegte. Steht nun νa und der Planet ϱ in Einer Geraden, so sieht man von a aus nach Ptolemäus den wahren Ort des Planeten ohne Parallaxe. Bei Kopernikus ist also die Gesichtslinie tr, derselbe Ort, in das Ptolemäische System übersetzt, würde in der Gesichtslinie $a\varrho$ erscheinen, die Gesichtslinien sind aber parallel zu einander — denn die mittleren Anoma-

lieen $q\mu\sigma$ und qmt sind =, desshalb ist $\mu\sigma$ parallel zu mt und, da av zu $\mu\sigma$ parallel gezogen ist, auch av parallel zu mt, also fallen die Gesichtslinien in dieselbe Richtung des Fixsternhimmels, und der Planet erscheint in beiden Fällen an demselben Orte des Fixsternhimmels. Wenn man also von der verschwindenden Differenz der Anomalieen in den beiden Systemen absieht, so entsprachen sich auch für dieselbe Zeit die beiden Oerter r und ϱ in den beiden Systemen. Nach Tycho bewegt sich der Planet ebenfalls mit dem Punkte der mittlern Bewegung v um die Erde; der Planet ist gleichsam angeheftet in v, und dieser Punkt ist das Centrum oder der visus für die Bewegung des Planeten auf seiner Bahn um die Sonne; also findet hier die unmittelbare Beobachtung des Planeten von a aus an dem wahren Orte seiner Bahn um die Sonne auch Statt, wenn va und der Planet ϱ in derselben Geraden sind. Die Erscheinungen der ersten Ungleichheit sind also auch nach dem Tychonischen System dieselben wie nach den andern Systemen. Und man findet den Ort, der in der Ptolemäischen und Tychonischen Hypothese dem Kopernikanischen Orte entspricht, wenn man von a aus eine Parallele zu der Verbindungslinie zwischen dem Mittelpunkte der Erdbahn m und dem Orte des Planeten auf seiner Kopernikanischen Bahn zieht, d. h. $a\varrho \parallel mr$. Die Grösse der Entfernungen ist allerdings etwas verschieden, aber der Einfachheit wegen wollen wir $a\varrho$ auch $= mr$ annehmen.

3. Bei nicht akronychischen Beobachtungen sei Fig. IX nach Kopernikus p der Ort des Planeten nach der ersten Ungleichheit, t die Erde, m der Mittelpunkt der Erdbahn oder des orbis magnus, a die Sonne; alsdann ist pmt, d. h. die Differenz zwischen der Länge des locus coaequatus des Planeten und der Länge der Erde die anomalia commutata und tpm, d. h. die Differenz zwischen jener Länge des Planeten und der gäocentrischen Länge desselben die Parallaxe des Planeten. Nach Ptolemäus ist nun der locus coaequatus des Planeten in p', wenn $ap' =$ und $\parallel mp$. Bewegte sich nun der Planet nur um die Erde, so würde er uns auch wirklich dann in p' erscheinen. Der Planet bewegt sich aber auch auf seinem Epicycel um den Mittelpunkt desselben gleichmässig, indem

er die Bewegung des Punktes der mittleren Bewegung der Sonne nachahmt oder indem der Radius seines Epicycels sich um den Mittelpunkt desselben parallel zu der Linie der mittleren Bewegung der Sonne bewegt. Den Ort der mittleren Bewegung finden wir aber, wenn wir *ta* bis zum Durchschnitt des Ptolemäischen Sonnenkreises nach σ verlängern, σ mit μ verbinden und dann $a\nu$ zu $\sigma\mu$ parallel ziehn, so ist ν der verlangte Ort. Ziehe ich nun von p' aus den Radius des Epicycels $p'\pi' =$ dem Radius des Sonnenkreises $= \mu\nu$ parallel zu $a\nu$, so ist π' der Ort des Planeten auf seinem Epicycel oder der Ort desselben nach der 2ten Ungleichheit. Nach dieser Construction ist $ap'\pi'$, die anomalia commutata und diese ist $= tmp$ — denn mp ist $\parallel ap'$ und $mt \parallel \mu\sigma$ und $p'\pi'$, und die Schenkel laufen nach verschiedenen Seiten —. Die Parallaxe ist hier $p'a\pi'$, und auch $p'a\pi'$ ist $= tpm$ aus denselben Gründen. Auch die Erscheinungen der 2ten Ungleichheit sind wesentlich dieselben bei Ptolemäus und Kopernikus.

Bei Tycho würde, wenn das einzige Centrum der Bewegung a wäre, der Planet auch in p', oder wenn der mittlere Ort der Sonne mit $p'a$ in Einer Geraden wäre, in ϑ, der Planet in π sein, das um den Radius des Sonnenkreises von p' entfernt wäre. Das bewegliche pnnctum affixionis aber ϑ ist um den Winkel $\vartheta a\nu$, oder wenn man $a\vartheta'$ und $a\nu' =$ dem Radius des Sonnenkreises macht, um den durch den Bogen $\vartheta'\nu'$ gemessenen Winkel von ϑ fortbewegt nach ν, um denselben Bogen $\pi\pi'$ ist auch der Planet fortgeschoben, so dass auch bei Tycho der erscheinende Ort in π' ist, und bei ihm überhaupt (im Wesentlichen) dieselben Erscheinungen auch der 2ten Ungleichheit wie bei Ptolemäus und Kopernikus.

Aber nicht in seinem System besteht der Ruhm Tychos. Sein Verdienst ist nicht die astronomische Speculation, sondern die Beobachtung. Er hat sich die Instrumente zu feineren Beobachtungen construirt und zwar mit solcher Vervollkommnung, dass während bei Ptolemäus und den Andern das Maximum der Beobachtungsfehler etwa 10 Minuten betrug, es bei ihm auf 1 —2 Minuten reducirt ist. Mit diesen selbstgeschaffenen Hülfsmitteln hat er dann ein Beobachtungsma-

terial, namentlich für den Mars, gesammelt, das der astronomischen Speculation den reichsten Stoff zur Gestaltung und zur Prüfung darbot. Ausserdem aber hat er die festen Sphären für immer abgethan, indem er beobachtete, dass Cometen die Bahnen der andern Planeten durchkreuzen, dass also diese Sphären in ihren Scheidungslinien nach verschiedenen Richtungen sich bewegen müssten, was unmöglich ist.

Wir stehn hier an einem Entscheidungspunkte. Es frug sich, ob es dem heliocentrischen System wieder eben so ergehen würde, wie es ihm im Alterthum ergangen ist; ob Tycho wiederum die Erde zu langem Stillstande verurtheilen sollte, wie die Astronomen des Ptolemäischen Systems — oder ob es durch den Beweis seiner innern Wahrheit und Folgerichtigkeit gerettet werden und zu seinem Rechte kommen sollte. Dieser Beweis sollte dem grossen Schüler Tycho de Brahes selbst gelingen, der dessen gewonnenes Material mit der schöpferischen Kraft seines Geistes gestaltete und durch eine speculative Analyse der Beobachtungen den Zusammenhang und die Gesetze der himmlischen Mechanik oder vielmehr Dynamik entdeckte, deren Strenge sich Sonne und Erde unwiderruflich unterwerfen mussten.

Kepler.

Wenn wir bei Kopernikus das Streben gesehen haben, in den Bewegungen der Himmelskörper eine einfache und harmonische Mechanik zu erkennen, aus der die Erscheinungen ohne Unregelmässigkeiten sich erklären liessen, so fühlte Kepler den heissen Drang, in dieser Mechanik das eigentliche Gesetz zu ergründen oder, um es mit einem seiner ganzen Anschauung entsprechenden Ausdruck zu benennen, die Idee dieser Mechanik aufzufinden. Denn seine eigentliche Weltauffassung ist eine Platonische. Das Streben, die Idee, aus der heraus Gott sein vorzüglichstes Werk, wie er sagt, das Weltgebäude, schuf, das Urbild der Welt, wie es im Geiste Gottes war, ehe es in die Sichtbarkeit eintrat, zu ergründen, war das Leben seiner Seele, die Schwungkraft seines Geistes, die ihn über das Veränderliche und Ver-

gehende hinaushob, das Dauernde, das ihm blieb, als er von Ort zu Ort zog und das ihn aufrecht hielt in Noth und Verkennung. Er ist einer von jenen seltenen Menschen, in denen sich Geist und Charakter das vollständige Gleichgewicht halten und sich gegenseitig unterstützen und bestimmen, die an Einen Gedanken ihr ganzes Leben setzen und denen dieser Gedanke das eigenthümliche Gepräge ihres Lebens ertheilt. Kepler hat 17 Jahre lang die Beobachtungen Brahes analysirt, um seine Gedanken von der Harmonik der Welt zu beweisen, und indem er in den schönen mathematischen Verhältnissen den eigentlichen Gedanken Gottes, der durch die Schöpfung verwirklicht war, erblickte, hat kein irdischer Mangel und kein menschliches Geschick ihm je die Freude stören können, die er in der Betrachtung der himmlischen Schönheit empfand. Ein ursprünglicher Hauch der Begeisterung geht durch seine Werke, die auch den Leser mit ergreift, und die Tiefe seiner Speculation vertieft auch unwillkürlich die Anschauung dessen, der ihr nachgeht. Und wenn die Mystik seines Wesens, die in den Erscheinungen immer ein bedeutendes Symbol erkennt, Gelehrten anderer Nationen, wie Holländern, lächerlich erscheinen mag, wir fühlen darin einen verwandten Zug unserer deutschen Natur, der uns die Freude uud den Stolz um so näher legt, dass er unser war. Man hat in Göthe wol die künstlerische Genialität gleichsam verkörpert gesehn; ich weiss nicht, ob man nicht mit demselben Rechte in Kepler gleichsam eine Darstellung des wissenschaftlichen Genius sehn kann. Er hatte grosse Ideen, verbunden mit dem festen Glauben an ihre Realität, dabei den Sinn für das Kleinste und die grösste Akribie — das *μεγαλεῖον* und das *ἀκριβές*, in deren Verbindung die alten Scholastiker die Classicität der Kunstwerke setzten — objective Intuitionen, den seiner selbst gewissen sichern Blick und den unversiegbaren Fleiss, den keine Mühe bleicht. Er war im Besitze der Errungenschaften seiner Zeit und seiner Wissenschaft und beherrschte sie zugleich mit vollständiger Freiheit seines Denkens. Wie Plato die früheren philosophischen Systeme durch die gestaltende Kraft seiner Idee zu einem vollendeteren System vereinte, so hat Kepler

die früheren astronomischen Theorieen des Ptolemäus, des Kopernikus und des Tycho de Brahe mit freier Kritik und selbständiger Combination und Speculation verwerthet und die Andeutungen der Wahrheit in denselben, ich möchte sagen mit dem congenialen Blick für das Wesen der Natur, zu ewig gültigen Gesetzen entwickelt. Es ist ihm gelungen, die Ahnungen seiner Jugend zum wissenschaftlichen Bewusstsein zu erheben; in edler Uebereinstimmung mit sich selbst, in seltener geistiger Treue hat er sein grosses Leben gelebt; auf ihn passt das Wort Göthes, das dieser selbst so schön in sich erfahren: Was man in der Jugend sich wünscht, hat man in dem Alter die Fülle.

Die drei Grundgedanken seiner Forschung.

Kepler erfasste früh das Kopernikanische System mit der Begeisterung, mit der ursprüngliche Geister der verwandte Gegenstand erfüllt. Er hat Gott oft gebeten, er möchte ihn etwas finden lassen, durch das die Wahrheit jenes Systems bewiesen würde. Dieser Beweis, den zu finden er als die Aufgabe seines Lebens fühlte, gründet sich auf 3 Gedanken, die Keplers Arbeit und den Gang seiner Forschung bestimmt haben.

Der erste war der, dass die Sonne selbst der Regulator der himmlischen Bewegungen und ihr Mittelpunkt deren gemeinsamer Indifferenzpunkt wäre, in dem die Apsislinien oder Achsen aller Planetenbahnen sich schnitten. Kopernikus, wie wir sahen, machte den Mittelpunkt der Erdbahn, um den sich die Erde zugleich gleichmässig bewegte, zu diesem bestimmenden Punkte; bei Tycho war es der bewegliche Punkt der mittleren Bewegung der Sonne. Und wenn bei Ptolemäus auch die Apsidenlinien sich alle in der Erde selbst schnitten, so war doch auch hier die Bewegung des Planeten auf seinem Epicycel ebenfalls von dem Punkte der mittlern Bewegung der Sonne, nicht von dieser selbst, abhängig. Alle 3 machten also einen ideellen geometrischen Punkt zum Regulator realer Bewegungen, und um sich diesen Causalnexus zu erklären, blieb nichts anderes übrig als

entweder die Planeten sich auf festen Sphären drehen zu lassen, deren Centrum jener Punkt war, wie das wol die Ansicht des Kopernikus ist, oder ihnen die Fähigkeit beizulegen, sich den Punkt, der ihre Bewegung bestimmte, vorzustellen, d. h. ihnen eine intellectuelle Kraft zuzugestehen. Nun hatte aber Tycho die Sphärentheorie für immer unmöglich gemacht, es würde also nichts übrig bleiben als die Planeten zu geistigen Wesen zu machen. Indem Kepler so den Ursachen der Bewegung nachforschte, erschloss sich ihm die Intuition, dass Bewegungen von Körpern nur durch Einwirkungen anderer Körper hervorgebracht werden könnten. Zwar gibt er die Beseeltheit der Himmelskörper noch nicht ganz auf, er schreibt der Sonne und der Erde die Fähigkeit zu, die Aspecten der Planeten zu empfinden, aber dies Leben besteht eben nur in Empfindung, in Passivität, nicht in Vorstellung und Thätigkeit. So verlegte er den Mittelpunkt der planetarischen Centralbewegung in die körperliche Masse der Sonne selbst und machte den Mittelpunkt des Sonnenkörpers zum Indifferenzpunkte der planetarischen Bewegung, d. h. zu dem Punkte, in dem die Apsislinien aller Planeten sich schneiden. Der menschliche Geist gewinnt hier wol zum ersten Mal die Vorstellung von der Fernwirkung der Körper und die Ahnung der Kraft, die sich ihm durch den zweiten bestimmenden Gedanken zum klareren Begriffe erheben sollte.

Dieser zweite Gedanke war die Auffassung von dem Wesen des punctum aequans bei Ptolemäus. Während Kopernikus es dem Ptolemäus zum Fehler anrechnet, dass er durch diese Annahme die gleichmässige Geschwindigkeit aufhöbe, erkannte Kepler eben darin, dass der Planet vom Apogäum oder Aphelium bis zum Perigäum oder Perihelium an Geschwindigkeit zunimmt, um von da bis zum Aphelium wieder abzunehmen, eine natürliche Folge von der Annahme, dass die Sonne selbst die Quelle der Bewegung wäre. Es war wie beim Lichte. Auch die Intensität des Lichts nimmt ab mit der Entfernung des beleuchteten Gegenstands von der Quelle. Und gerade diese Analogie der Erscheinungen der Bewegung mit denen des Lichts führte ihn zu dem Begriffe der Kraft; wie das Licht etwas Körperliches ist, schloss er, — zwar nicht im

gewöhnlichen Sinn, aber doch eine species, die von einem Körper ausgeht, so wird auch die Ursache der planetarischen Bewegung etwas Körperliches sein, eine Kraft und keine Seele. Aber dann, schloss er weiter, muss ein besonderes punctum aequans etwas allen Planeten Gemeinsames sein und auch dem Kreise zukommen, den die Erde um die Sonne beschreibt. Es kann bei diesem nicht der Mittelpunkt der Bahn und der Puukt der gleichmässigen Bewegung zusammenfallen, wie es nach allen früheren Systemen der Fall war; das könnte nur dann Statt finden, wenn in der Sonne selbst auch das geometrische Centrum der Erdbahn läge; da aber diese in Beziehung auf die Sonne ein excentrischer Kreis ist und die Punkte der Peripherie verschiedene Entfernungen von der Sonne haben, so muss diese Verschiedenheit der Entfernung von der Kraft der Bewegung auch eine Verschiedenheit der Geschwindigkeit bewirken; die Erde kann daher nicht in gleicher Zeit gleiche Bogen oder gleiche Winkel um den Mittelpunkt ihres Kreises beschreiben, sondern der Punkt, um den sie sich gleichmässig bewegt, muss von dem Mittelpunkte verschieden sein. Man sieht, während der erste Gedanke aus der Intuition der Kraft hervorgeht, liegt diesem die Intuition der stetigen Veränderung der Bewegung zu Grunde.

Der erste Gedanke bezog sich also auf das Centrum, die Kraft der Bewegung, der zweite auf die Beschreibung der Peripherie und die Wirkung der Kraft, der dritte hat es nun mit den Verhältnissen der einzelnen Planetenbahnen zu einander oder mit der Ordnung des ganzen Systems zu thun. Hier namentlich zeigt er sich als Jünger des Plato. Er sucht wie dieser in den kosmischen Verhältnissen die Verwirklichung der höchsten Schönheit, und wie Plato seinen *θεὸς δημιουργὸς* vor der Bildung der Welt Geometrie treiben lässt, so sieht auch Kepler in den Verhältnissen geometrischer Figuren ewige Gedanken Gottes. So kam er dahin, den Bau des Planetensystems als eine Verwirklichung der höchsten geometrischen Schönheit und eine Darstellung der 5 regelmässigen geometrischen Körper aufzufassen. Wie Euklid seine Elemente zu dem Zwecke

geschrieben hat, um diese 5 ausgezeichneten Körper, die Plato für die Urbilder und Elemente aller irdischen und himmlischen Körper hält, begreifen zu lehren, so hat Kepler einen grossen Theil seines Lebens daran gesetzt, ihr Dasein in den Verhältnissen der Planetenbahnen aufzufinden.

Das waren die Ideen, an die er glaubte und deren Realität nachzuweisen das Ziel seines Strebens wurde. Er veröffentlichte sie zuerst als Jüngling in seinem mysterium cosmographicum und begab sich dann zu dem Zwecke zu Tycho de Brahe nach Prag, um an dessen Beobachtungen sie zu prüfen und zu klären. Auf den ersten beiden Gedanken über die Sonne als Centrum und Regulator der Bewegung beruht sein Werk de motibus stellae Martis, auf dem dritten über den Bau der Welt seine harmonice mundi.

Der erste Grundgedanke und die Combination der früheren Systeme oder die hypothesis vicaria.

Als Kepler auf Tychos Sternwarte ankam, war man mit der Beobachtung des Mars beschäftigt. Er hält das für ein besonderes Glück, dass er dadurch veranlasst worden ist, sich auch mit der Erforschung der Marsbahn zu beschäftigen; weil dieser Planet am geeignetsten ist, um an ihm die Gesetze der planetarischen Bewegung zu erkennen. Einerseits nämlich ist im Gegensatze zu den 2 innern Planeten seine ganze Bahn der Beobachtung offen und andererseits ist seine periodische Zeit im Gegensatze zu den andern äussern Planeten nicht zu gross und bietet Einem Menschenleben genug Momente zur Beobachtung und Vergleichung dar. Die Voraussetzungen nun, mit denen Kepler seinerseits an diese Forschung herantrat, waren

1. die Kreisbahn, die er mit allen früheren Astronomen gemein hatte;
2. die Ptolemäische Configuration für die erste Ungleichheit, d. h. die Annahme eines besondern punctum aequalitatis, das auf der Linie der Apsis nach dem Apogäum oder Aphelium zu lag;
3. die nach dem Masse der damaligen Beobachtungschärfe hinreichende Richtigkeit der Beobachtungen Tychos

und der Anomalien desselben auf den Mittelpunkt des Sonnen- oder Erdkreises bezogen.

Da frug es sich nun zunächst, ob er bei der 3. Voraussetzung, dass die Tychonischen Anomalien für den visus im Mittelpunkt des Erdkreises im Allgemeinen richtig seien, den Gedanken durchführen könnte, den visus in die Sonne selbst zu verlegen. Kepler bejaht diese Frage aus folgenden Gründen:

1. weil sich die Bahn nach diesem Gedanken umändern liess, ohne dass der Planet dem Auge in jenem Punkte an einem wesentlich andern Orte zu erscheinen brauchte oder ohne dass, wie wir es jetzt ausdrücken, die heliocentrische Länge wesentlich verrückt würde.

Es sei $\varrho\vartheta o$ (Fig. X) der eccentricus des Mars nach Tycho, dessen Mittelpunkt ϑ, der Mittelpunkt des Sonnenkreises δ, das punctum aequans des Mars γ (das nach Ptolemäus so liegt, dass $\delta\vartheta = \vartheta\gamma$, nach Tycho, nachdem man dessen Mechanik auf die Ptolemäische zurückgeführt, so, dass $\delta\vartheta : \vartheta\gamma$ etwa $= 35 : 21$). Die Linie der Apsis ist also $\varkappa\gamma\vartheta\delta\tau$; in $\varkappa$ ist demnach das Apogäum, in τ das Perigäum. Die Winkel bei γ, um welchen Punkt der Planet in gleichen Zeiten gleiche Winkel beschreibt, messen die Zeit und sind die anomaliae mediae. Ist der Planet von $\varkappa$ nach λ gegangen, so hat er in der Zeit, die sich zur periodischen Zeit verhält wie $\sphericalangle\ \varkappa\gamma\lambda : 4\,R$ den Winkel $\varkappa\vartheta\lambda$ beschrieben, der dem Auge in δ aber nur in der Grösse des $\sphericalangle\ \varkappa\delta\lambda$ erscheint. Ist nun ferner der Planet oder der Mittelpunkt seines Epicycels von τ nach ψ gegangen, und ist $\tau\psi = \varkappa\lambda$ oder $\sphericalangle\ \psi\vartheta\tau = \varkappa\vartheta\lambda$, so hat er dazu eine Zeit gebraucht, die sich zur periodischen Zeit verhält wie $\psi\gamma\tau$ zu $4\,R$, der beschriebene Winkel $\psi\vartheta\tau$ selbst aber erscheint dem Auge in δ unter dem $\sphericalangle\ \psi\delta\tau$. Die Zeiten also, in der die gleichen Bogen beschrieben werden, verhalten sich wie die $\sphericalangle\ \varkappa\gamma\lambda$ und $\psi\gamma\tau$, $\varkappa\gamma\lambda$ ist aber grösser als $\psi\gamma\tau$, die physische Bewegung des Planeten ist also in jener Gegend, in der Nähe des Apogäums, langsamer als in dieser, der Nähe des Perigäums. Zugleich erscheint aber der gleiche Bogen dort unter dem kleineren Winkel $\varkappa\delta\lambda$, hier unter dem grössern

$\psi\delta\tau$; es ist also auch die optische Bewegung, wie wir sie nennen können, im Apogäum langsamer, im Perigäum schneller. Die dem Auge in δ erscheinende Bewegung setzt sich also aus der physischen und optischen zusammen. Beide sind im Apogäum am langsamsten, im Perigäum am schnellsten. Nehmen wir nun an, dass die so zusammengesetzte Winkelbewegung des Planeten für das Auge in δ von Tycho richtig berechnet und für jeden Zeitpunkt die richtige Gesichtslinie von δ nach dem Planeten, d. h. sein Ort auf der Fixsternsphäre für δ daraus entnommen werden oder für jede anomalia media die entsprechende anomalia coaequata angegeben werden könnte. Es handelte sich also für Kepler darum, ob er den visus von δ nach α in die Sonne selbst und damit die Apsis verlegen könnte, ohne dass die anomaliae coaequatae für δ sich wesentlich veränderten. Und da war es zunächst die Frage, ob dabei der Mittelpunkt und damit die Lage des eccentricus im Raume beibehalten werden könnte. Dann würde $\alpha\vartheta$ die Apsislinie des eccentricus werden, und es müsste das punctum aequans, das nach der Voraussetzung auf der Apsislinie vom Mittelpunkt nach dem Apogäum zu liegen muss, auch in die Linie $\alpha\vartheta$ verlegt werden. Es sei nach μ. Bei dieser Construction würden aber dem Auge in δ seine Tychonischen Anomalien nicht gerettet werden. Die optische Bewegung würde zwar auch dann in $\varkappa$ am langsamsten und in τ am schnellsten sein, weil $\varkappa$ am entferntesten und τ am nächsten zu δ liegt, aber die physische würde alsdann in χ, dem neuen Aphelium am langsamsten und in ω, dem neuen Perihelium, am schnellsten sein müssen. Für das Auge in δ würde also der Planet sich nicht mehr in $\varkappa$ am langsamsten, oder in τ am schnellsten bewegen, aber auch nicht jenes in χ oder dieses in ω, sondern da, wo durch eine Ausgleichung der physischen und optischen Bewegung das Maximum und Minimum der für δ erscheinenden Bewegung bewirkt werden würde, das Minimum würde zwischen $\varkappa$ und χ, das Maximum zwischen τ und ω fallen. Es würden also die Tychonischen Anomalien für δ, die um τ am grössten und um $\varkappa$ am kleinsten sind, nicht bestehen bleiben.

Behält man aber bei der Verlegung des visus von δ nach α das punctum aequaens γ bei, so wird zwar das Minimum der physischen Bewegung auch von $\varkappa$ verlegt in die Richtung von $\alpha\gamma\varepsilon$ und das Maximum von τ in die Richtung $\gamma\alpha\iota'$, aber indem ich zugleich den Mittelpunkt zwischen α und γ legen muss — es sei nach β — und dann von β mit dem Radius $\vartheta\varkappa$ eine neue Kreisbahn construire $\beta\pi\iota\xi$, so werden für das Auge in δ zugleich die Tychonischen Oerter des Planeten auf der Seite von $\varkappa$ weiter hinaus- und auf der Seite von τ näher herangerückt, wie $\varkappa$ nach ζ und τ nach φ, der Planet in $\varkappa$ erscheint δ verhältnissmässig ferner, in φ verhältnissmässig näher, die optische Bewegung wird also dort noch langsamer, wenn auch die physische schneller ist, hier noch schneller, wenn auch die physische langsamer ist, und es lässt sich jedenfalls der neue Kreis so gegen den früheren verrücken, dass die Veränderung der physischen Bewegung in $\varkappa$ und τ durch die Veränderung der optischen in ζ und φ und ebenso in den übrigen Punkten für das Auge in δ aufgewogen und diesem bei der neuen Bahn seine Erscheinungen erhalten werden. Dies findet nach Kepler dann Statt, wenn man den Mittelpunkt β so legt, dass sich $\alpha\beta : \beta\gamma = \delta\vartheta : \vartheta\gamma$ verhält. Da nämlich der Planet auf beiden Bahnen um γ in gleichen Zeiten gleiche Winkel beschreibt, liegen die correspondirenden Oerter der Bahnen immer mit γ in derselben Linie. Zu der Zeit also, wo er auf der Tychonischen Bahn in ε zu suchen ist, muss er auf der neuen in ι gesucht werden, ebenso entsprechen sich $\varkappa$ und ζ, σ und η, φ und τ u. s. w. Während also nach Tycho dem Auge in δ der Planet in der Gesichtslinie $\delta\varepsilon$ erscheinen würde, erscheint er ihm nach der neuen Construction in der Linie $\delta\iota$, der Unterschied der alten und neuen Anomalie für δ ist also $\varepsilon\delta\iota$, in $\varkappa$ ist der Unterschied 0, in σ und η ist er $\sigma\delta\eta$ u. s. w.; es fragt sich, wie gross das Maximum des Unterschiedes ist, und ob dies nach dem Masse unserer Sinnesschärfe vernachlässigt werden kann. Dieses Maximum ist von dreierlei abhängig; der Unterschied ist um so grösser, je grösser der Zwischenraum zwischen den beiden Kreisen ist, je weniger schräg die Verbindungslinie der correspondirenden Oerter zu

δ steht oder je weniger sich die beiden Gesichtslinien in der Länge von einander unterscheiden und drittens je näher die Orte an δ liegen. Der ersten Abhängigkeit wegen müsste das Maximum in $o\xi$ oder $\varrho\pi$ fallen, der zweiten wegen, da dieser Theil des Unterschiedes in $\varkappa - \zeta$ und $\tau - \varphi = 0$ ist, in die Mitte zwischen ζ und φ; der beiden Abhängigkeiten zusammen wegen also zwischen $o\xi$ und $\tau\varphi$ oder $\varrho\pi$ und $\varkappa\zeta$; da aber die Seite von $o\xi$ nach $\tau\varphi$ näher an δ liegt, als die von $\varrho\tau$ nach $\varkappa\zeta$, so muss das Maximum zwischen $o\xi$ und $\tau\varphi$ fallen. Wenn man also in γ ein Perpendikel auf $\vartheta\varkappa$ errichtet, welches die beiden Kreise in v und v' trifft, so wird in diesen Punkten etwa jener Unterschied der grösste, d. h. der Winkel $v\delta v'$ das Maximum sein. Dieser Winkel berechnet sich auf 4′ 24″. Es bleiben also die Tychonischen Anomalien für den visus in δ auch bei der neuen Bahn, deren Absislinie $\alpha\beta\gamma$ ist, im Wesentlichen bestehn.

Anders allerdings verhält es sich mit der zweiten Ungleichheit oder mit dem gäocentrischen Orte des Planeten. Der könnte auf der neuen Bahn gegen die Tychonische um 1° 3′ 32″ verschoben erscheinen. Es wäre also die Möglichkeit gegeben, durch gäocentrische oder wie es damals hiess durch ausserakronychische Beobachtungen über den Vorzug der beiden Bahnen zu entscheiden.

Der zweite Grund, der Kepler darin bestärkte, eine neue Bahn des Mars mit der Apsislinie durch die Sonne zu construiren, war die Erfahrung, dass Tycho die Oerter des Mars in der Ekliptik nicht richtig auf die Oerter in der Bahn zurückgeführt hatte. Da die Marsbahn, wie überhaupt jede Planetenbahn, und die Ekliptik gegen einander geneigt sind, so stehn die Sonne oder Erde und der Mars wirklich in Einer geraden Linie mit dem Auge im ruhenden Centrum oder auf der Erde nur dann, wenn die Conjunction oder Opposition in den Knotenpunkten der Bahn Statt findet, in allen andern Fällen muss man den Ort des Planeten in der Ekliptik auf den in seiner Bahn zurückführen, Es erscheine (Fig. XI) der Mars mit der Sonne in Opposition, G sei die Sonne, H die Erde, E die Projection von H auf die Fixsternsphäre, also der Punkt der Ekliptik, der gerade 180° von dem schein-

baren Orte der Sonne entfernt ist, oder, wie ihn Kepler nennt, der locus oppositus; alsdann findet man den in Opposition stehenden Ort des Mars in seiner Bahn, wenn man durch *E* einen senkrechten Kreis legt; wo dieser die Marsbahn schneidet, ist der fragliche Ort. Der Mars wird also der zur Ekliptik geneigten Bahn wegen sowohl von *G* als von *H* gesehn eine gewisse Breite haben. Von *H* aus erscheine er unter der Breite *EHC* in *C*, dann ist sein wahrer Ort allerdings in der Linie *HC*, aber unterhalb *C*, es sei in *I*; von der Sonne aus erscheint er also in der Linie *GI*, die die Fixsternsphäre in *F* schneiden möge. Will man also die von der zweiten Ungleichheit nicht beeinträchtigte Bahn construiren, so muss man den Bogen *AF*, nicht *AC*, die Entfernung der heliocentrischen, nicht der gäocentrischen Projection des Planetenortes vom Knotenpunkte als den entsprechenden Theil der projicirten Marsbahn betrachten. Tycho berechnet nun falsch aus *AE* und der Breite *EHC* oder dem wechselnden Neigungs-Winkel von *AE* und *AC* den Bogen *AC* als Bogen der Marsbahn, während er aus *AE* und dem unveränderlichen Neigungs-Winkel *EAF* oder der heliocentrischen Breite *EGF* den Bogen *AF* als solchen hätte berechnen müssen. Der Unterschied dieser Längen kann in der Entfernung vom Knoten $= 45^0$ auf $9'$ anwachsen, ein Unterschied, der grösser ist als der, welcher durch die Verlegung der Marsbahn im Sinne Keplers bewirkt wird.

Durch diese beiden Gründe also in der Verfolgung seines Gedankens bestärkt versuchte er es, die Apsislinie der Marsbahn durch die Sonne selbst zu legen und ihm unter dieser Hypothese eine neue Bahn zu construiren. Zu dieser Construction waren ihm also nach seinen Voraussetzungen folgende Elemente nöthig. 1. Die Lage der Knoten, 2. der Neigungswinkel der Bahn gegen die Ekliptik, 3. der Ort des Apheliums und Periheliums oder die Lage der Apsislinie im Raume, 4. die Entfernung des Mittelpunkts der Kreisbahn von der Sonne oder die einfache Excentricität der Bahn, 5. die Entfernung des punctum aequans von der Sonne (die wir die zusammengesetzte Excentricität nennen wollen), 6. der Radius. Er bestimmte zu-

nächst die Knoten und den Neigungswinkel durch Beobachtung mit annähernder Genauigkeit, welche für's erste genügte.

Ist der Planet in seinem Knotenpunkt mit der Ekliptik, so muss er von der Erde aus, in welchem Punkte der Ekliptik sie auch sein möge, in der Ekliptik selbst gesehn werden oder die Breite muss 0 sein. Im Jahre 1595 den 27. Octbr. war die Breite des Mars $0^0\ 2'\ 20''$ südlich; am 28. Octbr. war die Breite $0^0\ 0'\ 25''$ nördlich. In der Zwischenzeit war also der Planet im aufsteigenden Knoten. Nach Tycho fiel damals der Ort seines eccentricus vom ruhenden Centrum gesehn oder der locus coaequatus in $16^2/_3{}^0$ ♉; der absteigende Knoten ist also in $16^2/_3{}^0$ ♏; die limites demnach in $16^2/_3$ ♌ und $16^2/_3$ ♒.

Den Neigungs- oder Inclinationswinkel fand er aus den Tychonischen Beobachtungen auf folgende Weise: Es sei (Fig. XII) *AEFB* die Ebene der Marsbahn, *ACDB* die der Ekliptik, diese Ebenen schneiden sich in der Linie *AB*; es seien also *G*, *H* die Knotenpunkte der Marsbahn, *E* sei ein limes der Marsbahn, *C* der Ekliptik, *A* die Sonne; verbinde ich *A* mit *E* und *C* so ist $\sphericalangle$ *EAC* der Inclinationswinkel der Marsbahn zur Ekliptik. Unter einer gleich grossen Breite erscheint der Mars aber uns auf der Erde bei der Constellation, wenn die Erde *B* in der Schneidungslinie *GH* und der Mars *F* so steht, dass die Gesichtslinie nach ihm *BF* mit *AE* parallel oder senkrecht zu *GH* ist; denn errichte ich auch *BD* senkrecht zu *GH* in der Ebene der Ekliptik, so ist *FBD* der Winkel, unter dem die Breite des Mars uns erscheint, und dieser ist = *EAC*, weil die Schenkel einander parallel sind und nach derselben Seite hinliegen. Kann ich also den Mars bei dieser Constellation beobachten, so ist die gesehene Breite desselben zugleich der Inclinationswinkel seiner Bahn zur Ekliptik. Diese Constellation aber findet dann Statt, wenn der scheinbare Ort der Sonne in einem Knotenpunkte der Marsbahn *G* oder *H* ist, in $16^2/_3$ ♉ oder $16^2/_3$ ♏, und der Mars mit der Sonne in Quadratur steht, so dass *FBG* oder *FBH* = *R* ist. Nun erschien im Jahre 1585 den 26. April, 9 Uhr 42′ der Mars in $21^0\ 26'$ ♌ und die Sonne war in 16^0 ♉; die Sonne war also sehr nahe beim Knoten und die Configu-

ration zwischen Mars und Sonne nur um einige Grade von der Quadratur verschieden; der Mars erschien unter einer Breite von $1^0\ 49^3/_4'$ nördlich. Da er schon vom limes sich etwas nach dem andern Knoten zu bewegt hatte, so ist dieser Winkel ein wenig kleiner als *EAC* oder *FBD*; die Inclination wird nahezu $1^0\ 50'$ sein.

Bei dieser Untersuchung befreite er zugleich die astronomische Anschauung von einem grossen Irrthum. Da nämlich die Neigung der Planetenbahnen zur Erdbahn uns immer zu wechseln scheint, weil die Erde sich bewegt, so erklärte sich Ptolemäus, da er die Erde ruhend setzte, diesen Wechsel dadurch, dass er den Epicycel, auf dem der Planet die Sonne nachahmend sich bewegt und den er eigentlich hätte zur Ekliptik parallel construiren müssen, zur Ekliptik geneigt sein liess. Kopernikus fand nun zwar, dass dieser Wechsel im Allgemeinen von der Bewegung der Erde herkam; aber da er die Ptolemäischen Zahlen beibehielt, die zu gross waren und die er aus der Annäherung der Erde an den Mars allein nicht erklären konnte, so kam er diesem durch die Annahme zu Hülfe, dass die Neigung der Bahn zur Ekliptik einer Libration unterworfen sei. Auch nach Tycho, der die grösste nördliche Breite des Mars auf $4^0\ 35'$, die grösste südliche auf $6^0\ 26'$ bestimmt, also da er die Erde ruhen lässt, der Bahn eine verschiedene Neigung im Norden und Süden ertheilt, würde die Bahn eine gebrochene Curve sein müssen. Diese Annahme hielt Kepler von vorn herein für Irrthum, da sie der Einfachheit oder der Continuität der Natur widerspräche, durch seine Untersuchung über den Inclinationswinkel widerlegte er diesen Irrthum auf inductivem Wege.

Es mussten also nun noch die beiden Excentricitäten, die Lage der Apsislinie und der Radius gefunden werden. Den Radius schloss er jetzt aus, setzte ihn = 1, da es ihm zunächst nur um das Verhältniss der Excentricitäten zum Radius, nicht um die absoluten Grössen zu thun war. Wir haben schon gesehn, dass Ptolemäus aus 3 akronychischen Beobachtungen den eccentricus, die Excentricitäten eines Planeten construirte; aber er setzte das Verhältniss der einfachen zur zusammengesetzten Excentricität von 1 : 2 vor-

aus; Kepler nahm dies aber in das Problem mit auf. Er benutzte desshalb 4 akronychische Beobactungen zur Lösung seines Problems. Tycho hatte überhaupt 10 akronychische Beobachtungen des Mars gemacht. Aber er hatte sie auf den Punkt der mittleren Bewegung der Sonne zurückgeführt. Nach seiner Idee, dass die Sonne selbst der Regulator der Bewegung und der gemeinsame Schneidungspunkt aller Apsislinien wäre und von ihr aus die Excentricitäten gerechnet werden müssten, musste Kepler die Opposition des Planeten mit dem mittleren Orte der Sonne auf die Opposition desselben mit der Sonne selbst reduciren. Während also Tycho aus dem Erscheinen des Mars und der Sonne in den entgegengesetzten Zeichen den articulus oppositionis des mittleren Ortes der Sonne berechnet hatte, berechnete Kepler den articulus oppositionis des Planeten mit dem wirklich erscheinenden Orte der Sonne. Z. B.: Im Jahre 1580 den 12. Novbr. Stunde 10 15′ war der Mars in 8° 37′ ♊ gesehen, während die Sonne zu derselben Zeit in 0° 45′ 36″ ♐ sich befand. Daraus berechnete Tycho, dass der Zeitpunkt der Opposition des mittleren Ortes der Sonne mit dem Planeten der 17. November 9 Uhr 40′ war und der Ort des Planeten zu der Zeit in seiner Bahn 6° 50′ 10″ ♊; Kepler aber auf folgende Weise die Opposition mit dem wirklichen Orte der Sonne selbst. Der Mars (d. h. sein locus oppositus, der also in 8° 37′ ♐ war) war damals von der Sonne entfernt 8° 37′ — 0° 45′ 36″ = 7° 51′ 24″. Die Sonne legte nun in einem Tage 1° 1′ zurück, der Mars 23′; der Bogen also, den ihre zusammengesetzte Bewegung in Einem Tage zurücklegte, war 1° 24′; die 7° 51′ 24″ Entfernung legten sie also in $\frac{7{,}86}{1{,}4} = 5{,}6142$ Tagen zurück oder in 5 Tagen, 14 Stunden, 44 Minuten. Die Beobachtung fand Statt am 12. Novbr. 10 Uhr 50 M.; die fragliche Opposition also am 18. Novbr. 1 Uhr 34 Minuten, und da der Mars in Einem Tage 23′ zurücklegte, so hatte er in den 5 T. 14 St. 44 M. nahezu 2° 9′ zurückgelegt, sein Ort in der Ekliptik war also im Zeitpunkt der Opposition 6° 28′ ♊. Dieser Ort des Mars in der Ekliptik muss noch auf seinen Ort in der

Bahn zurückgeführt werden. Die Entfernung des Ortes in der Ekliptik vom Knoten ($16^1/_2$ ☊) *AE* (Fig. XI) ist = $19^0\ 58'$, der Inclinationswinkel $EAF = 1^0\ 50'$,

$$tg\ AF = \frac{tg\ AE}{cos\ A.} = \frac{tg\ 19^0\ 58'}{cos\ 1^0\ 50'} = tg\ 19^0\ 58'\ 34''.$$

Der Ort des Planeten von der Sonne selbst in seiner Bahn gesehn erscheint also ($16^1/_2$ ☊ + $19^0\ 58'\ 34''$) in $6^0\ 28'\ 34''$ ♊.

Auf diese Weise führt er also die 10 akronychischen Marsbeobachtungen des Tycho auf die Opposition des Mars mit dem Orte der Sonne selbst zurück, und da er noch selbst 2 akronychische Beobachtungen nach seinem Principe gemacht hinzufügt, von denen die eine er selbst, die andere sein Freund Fabricius, der Friesische Geistliche, gemacht hat, so stehn ihm 12 heliocentrische Oerter des Mars zu Gebote [5]). Aus diesen nahm er also 4 zur Lösung der Aufgabe, die näher bestimmt folgende war. Gegeben war:

1. Die Richtung von 4 Gesichtslinien von der Sonne nach den 4 Oertern des Planeten (Fig. XIII) *sa*, *sb*, *sc*, *sd* oder die 4 Winkel um die Sonne α, β, γ, δ. 2. die Zeiten, welche zwischen den Beobachtungen des Planeten an den 4 Oertern verflossen sind, oder da er den Zeiten proportionale Winkel um das punctum aequans herum beschreibt, auch die 4 Winkel, die der Planet in diesen Zeiten um das punctum aequans (*q*) beschrieben hat: α', β', γ', δ'. Gefordert wird:

Die beiden Punkte *s*, *q* so zu einander zu legen, dass 1. die correspondirenden Gesichtslinien von *s* und *q* nach den Oertern des Planeten *sa* und qa', *sb* und qb' u. s. w. sich auf der Peripherie eines Kreises schneiden und 2. dass der Mittelpunkt dieses Kreises zwischen den beiden Punkten auf derselben Linie liegt. Damit ist denn die Lage der Apsislinie und die zwiefache Excentricität gefunden.

Kepler löste dies Problem auf indirectem Wege. Er nahm an, die Aufgabe wäre gelöst; der eccentricus des Mars wäre *fedg*, der Mittelpunkt *c*, *s* die Sonne, *q* das punctum aequans, p' das Aphelium, *p* das Perihelium, *f*, *e*, *d*, *g* die

Schneidungspunkte der correspondirenden Schenkel von den Winkeln um s und um q. Dann wird die Richtigkeit der Lösung auf folgende Weise geprüft: 1. ob die Schenkel der gegebenen Winkel sich wirklich auf einem Kreise schneiden oder ob f, e, d, g auf der Peripherie eines Kreises liegen, wird man dadurch prüfen können, ob je 2 gegenüberliegende Winkel des Vierecks $efgd$ zusammen $= 2\ R$ sind, wie das bei einem Kreisviereck der Fall sein muss. 2. ob der Mittelpunkt c zwischen q und s auf derselben Linie liegt, wird dadurch controlirt werden, ob der Winkel qsg oder qsf u. s. w $= csg$ oder csf u. s. w. ist. Stellt sich heraus, dass diesen Bedingungen der Richtigkeit der Lösung nicht genügt ist, so muss man s und q anders zu einander legen, d. h. den Winkel fqs (oder fqp') oder den Winkel fsq (oder fsp') oder beide so lange ändern, bis den Bedingungen genügt ist. Offenbar hat diese Methode nur dann Sinn, wenn die Lage von sq, d. h. die Lage der Apsislinie und damit der Ort des Apheliums und Periheliums im Allgemeinen schon bekannt ist oder wenn man für fqp' und fsp' schon annehmbare Näherungswerthe kennt. Diese hatte er aber durch seine Vorgänger. Die 4 Beobachtungen, die er gebrauchte, waren:

1. 1587. 6. März 1 St. 31 M. war der heliocentrische Ort des Mars in $25^0\ 43'$ ♍.

2. 1591. 8. Juni 7 St. 43 M. war der heliocentrische Ort des Mars in $26^0\ 43'$ ♐.

3. 1593. 25. August 17 St. 27. M. war der heliocentrische Ort des Mars in $12^0\ 16'$ ♌.

4. 1595. 31. Octbr. 0 St. 39 M. war der heliocentrische Ort des Mars in $17^0\ 31^2/_3$ ♉.

Diese Oerter müssen der Präcession der Nachtgleichen wegen auf Eine Epoche zurückgeführt werden. Diese sei die Beobachtungszeit des Jahres 1587. Da nach Tycho die Präcession jedes Jahr 51″ beträgt, so ist daraus die Präcession für die Zwischenzeiten zwischen den Beobachtungen einfach zu berechnen. Danach fällt

1. in $25^0\ 43'$ ♍.
2. in $26^0\ 39'\ 23''$ ♐.

3. in 12 ⁰ 10′ 30″ ♓.
4. in 17 ⁰ 24′ 22″ ♉.

Es falle nun *sf* wie 1, *se* wie 2, *sd* wie 3, *sg* wie 4, alsdann ist der

$$\begin{aligned} \sphericalangle fsg &= 128^0\ 18'\ 38''. \\ \sphericalangle gsd &= 65^0\ 13'\ 52''. \\ \sphericalangle dse &= 75^0\ 31'\ 7''. \\ \sphericalangle esf &= 90^0\ 56'\ 23''. \end{aligned}$$

Die Winkel *fqg*, *gqd* u. s. w. werden auf folgende Weise gefunden. Die periodische Umlaufszeit des Mars ist nahezu 687 Tage (eigentlich 687 Tage weniger 28′); in dieser Zeit beschreibt er um q 360 ⁰, in jeder Zeit t aber einen Winkel, der sich zu 360 ⁰ verhält, wie t : 687 Tagen; es ist also der Winkel um q für die Zeit $t = \frac{t}{687} \cdot 360^0$. Zwischen den Beobachtungen *f* und *e* z. B. ist ein Zeitraum von 4 Jahren und ausserdem die Zeit vom 6. März bis 8. Juni vergangen = 1555 Tage; der $\sphericalangle$ also, den der Planet während dieser Zeit um q beschrieben hat, ist $= \frac{1555}{687} \cdot 360^0 = 2 \cdot 360^0 +$ 94 ⁰ 50′ 50″; er hat also 2 mal die Umdrehung vollendet und noch einen Winkel von 94 ⁰ 50′ 50″ beschrieben; der Winkel *fqe* ist also (nahezu) 94 ⁰ 50′ 50″. Ebenso sind die andern Winkel bekannt.

Die Näherungswerthe, die Kepler für seine Rechnung nöthig hatte, gab ihm Tycho. Die mittleren Längen fielen danach:

qf in 0 ⁰ 47′ 40″ ♎ (6ˢ)			
qg in 7 ⁰ 14′ 9″ ♉ (1ˢ)	}	oder mit der Correctur der Präcess. wegen	{ 1ˢ 7 ⁰ 6′ 51″.
qd in 9 ⁰ 55′ 4″ ♓ (11ˢ)			{ 11ˢ 9 ⁰ 49′ 34″.
qe in 5 ⁰ 43′ 55″ ♌ (9ˢ)			{ 9ˢ 5 ⁰ 40′ 18″.

Das Apogäum setzte Tycho 1587 in 25 ⁰ 23′ 32″ ♌. Kepler beginnt aber seine Rechnung, so weit er sie hat drucken lassen, mit dem Apogäum 1587 in 28 ⁰ 44′ ♌ und setzte zu den mittleren Längen des Tycho 3′ 16″ hinzu. Jedenfalls hat er diese beiden Correcturen durch frühere Rechnungen als nothwendig gefunden.

Er nimmt also den Winkel *fsp'*, die anomalia coaequata,

da *sp'* in 28° 44 ♌
sf, in 25° 43' ♍

= 26° 59'

den Winkel *fqp'*, die anomalia media,

da *qp'* in 28° 44' ♌
qf in 0° 50' 56" ♎ [in 0° 47' 40" ♎ + 3' 16".]

= 32° 6' 56"

Der Unterschied dieser anomalia media und coaequata, oder die aequatio *sfq* ist also = 32° 6' 56" — 26° 59' = 5° 7' 56". Ebenso sind danach die Winkel *gsp'* und *gqp'* und deren aequatio, kurzum alle Winkel um *q* und *s* leicht zu finden. Nimmt man dann *qs* als Einheit, so sind auch die Dreiecke *qsf*, *qsg* u. s. w. und die Linien *sf* und *qf*, *se* und *qe* u. s. w. in dem Masse von *qs* bestimmt.

Der Zweck der weiteren Rechnung ist also 1. zu sehen, ob unter diesen Daten $\sphericalangle efg + gde = 2\,R$ ist. Der Gang ist folgender:

Durch *sf* und *se*, die im Masse von *sq* berechnet sind, und dem $\sphericalangle esf$, der aus der Beobachtung bekannt ist; ist das $\triangle esf$ bestimmt, also auch der $\sphericalangle efs$ gegeben; ebenso ist das $\triangle fsg$ durch *fs* und *sg* und den $\sphericalangle fsg$ bestimmt und dadurch der $\sphericalangle sfg$ gegeben; also ist alsdann $efs + sfg = efg$ bekannt. Auf dieselbe Weise findet man den $\sphericalangle edg$. Sind diese beide zusammen $= 2\,R$, so lässt man das Apogäum und die Excentricität bestehen, d. h. man behält die $\sphericalangle\sphericalangle\ p'sf$ und $p'qf$ bei; sind sie nicht $= 2\,R$, so ändert man zunächst einen Winkel, etwa $p'sf$, fängt die Rechnung von vorn an und sieht zu, ob durch diese Aenderung die Summe der beiden Winkel die verlangte $= 2\,R$ wird. Ist das dann auch noch nicht der Fall, so ändert man den andern $p'qf$ oder beide, kurz, man ändert an diesen beiden Winkeln so weit und so lange, bis die Summe der beiden Vierecks-Winkel $= 2\,R$ wird. Dann ist der ersten Voraussetzung für die Construktion der Bahn, dass die Figur der Bahn eine Kreislinie ist, genügt. Aber es muss auch noch der zweiten Voraussetzung genügt werden, dass der Mittelpunkt dieser Kreislinie *c* auf der

Apsislinie *sqp'* zwischen *s* und *q* liegt. Ist dies der Fall, so muss der ∢ *qsg* = *csg* sein. Diese Winkel werden folgendermassen berechnet:

Aus *es* und *sg* und dem Winkel *esg* [= *esf* + *fsg*] ist das △ *esg* bestimmt und damit die Seite *eg* im Masse von *sq* und der Winkel *sge*. Ferner ist der Winkel *ecg* als Centriwinkel das Doppelte von *efg*, also bekannt; desshalb ist das gleichschenklige △ *ecg* aus dem Winkel *ecg* und der Seite *eg* bestimmt; desshalb kann auch *cg* im Masse von *qs* berechnet werden; der ∢ *cgs* ist aber = *cge* + *egs*, also ist in dem △ *cgs* der Winkel *cgs*, die Seite *cg* und *sg* bekannt und damit das △ bestimmt, also auch der ∢ *csg* gegeben.

In dem △ *qsg* ist aber *qg* und *sg* bekannt und die ursprüngliche Einheit *qs*, also ist auch der Winkel *qsg* gegeben. Werden diese beiden Winkel *csg* und *qsg* = gefunden, so ist auch der zweiten Voraussetzung genügt, ist das nicht der Fall, so müssen die Grössen *fqp'* und *fsq*, eine oder beide wiederum geändert werden, bis jene Winkel = sind. Dann stimmt aber das Resultat vielleicht wieder nicht zur ersten Voraussetzung, und so muss man wieder ändern, um durch die Resultate beiden Voraussetzungen zusammen zu genügen. Die Rechnung muss überhaupt so oft immer von vorn gemacht werden, bis sowohl die 4 Punkte auf einer Kreisperipherie stehn als auch der Mittelpunkt dieses Kreises zwischen der Sonne und dem punctum aequans auf der Apsislinie liegt. Ist das endlich erreicht, so nimmt man den Radius *cf* als Einheit, den man bisher als Vielfaches von *qs* angab und drückt umgekehrt *qs*, *qc* und *sc*, die Excentricitäten, in dem Masse des Radius aus. Dies ist die berühmte Rechnung, die Kepler wenigstens 70 Mal vorgenommen hat und um deretwillen er dem Leser das Recht zugesteht, ihn zu bedauern. Das schliessliche Resultat war 1. dass *sqp'* d. h. die Linie der Apsis 28°, 48', 55" ♌ fiel. Dahin war also das Aphelium für 1587 und das Perihelium in 28°, 48', 55" ♒ zu legen; und 2: dass, der Radius der Marsbahn = 100000 gesetzt, *qs*, die zusammengesetzte Excentricität, die Entfernung des punctum aequans von der Sonne, = 18564; *sc*, die einfache Excentri-

cität, die Entfernung des Mittelpunkts von der Sonne, = 11332, *cq* mithin = 7232 sei. Der Radius = 1, ist also *qs* = 0, 18568, *sc* = 0, 11332 und *cq* = 0, 07232.

Das ist die hypothesis vicaria. Durch diese sollte also das Problem gelöst sein, für jede gegebene Zeit den entsprechenden heliocentrischen Ort mit der Beobachtung übereinstimmend zu berechnen. Zur Entscheidung darüber, ob die Aufgabe wirklich gelöst wäre, boten sich zunächst die 8 akronychischen Beobachtungen dar, die ausser den 4 zur Begründung der Hypothese gebrauchten noch übrig waren. Berechnet man also für irgend eine jener Beobachtungszeiten aus der gegebenen anomalia media, etwa *p'qx*, dem Radius *cx* und den Entfernungen *cq* und *qs* die anomalia coaequata *p'sx*, so muss die Linie *sx* an denselben Ort der Fixsternsphäre fallen, an welchen sie nach jener Beobachtung gesetzt worden ist. Das Resultat der Rechnung stimmt bei allen 8 Fällen mit der Beobachtung hinreichend zusammen. Das Maximum der Differenz war 2′ 12″, also für die damalige Beobachtungschärfe zu vernachlässigen.

Damit hatte sich also Kepler gegenüber den andern Systemen das Recht erstritten, die Apsislinie der Planetenbahn durch die Sonne selbst zu legen. Delambre hat nicht Unrecht, wenn er dieses Bewusstseins wegen, das ihm die unsägliche Arbeit verschafft, Keplern das Mitleiden versagt, das dieser um der Arbeit willen für sich in Anspruch nimmt. —

Widerlegung der Hypothesis vicaria.

Und dennoch war die hypothesis vicaria falsch. Sie genügte allerdings den Erscheinungen der ersten Ungleichheit, d. h. den Erscheinungen für das Auge in der Sonne. Aber durch die zweite Ungleichheit, d. h. die durch die Bewegung der Erde bewirkten Erscheinungen wurde sie widerlegt und zwar auf zweierlei Weise: 1. durch die Breiten bei den akronychischen Beobachtungen und 2. durch die nicht akronychischen oder gäocentrischen Längenbeobachtungen.

1. Es ist klar, dass die Summe der Entfernungen des Planeten von der Sonne in seinem Aphelium und seinem Perihelium = dem Durchmesser, die Hälfte dieser Summe = dem

Radius der Bahn, die Hälfte der Differenz der beiden Entfernungen = der einfachen Excentricität ist. Könnte man also diese beiden Entfernungen aus den Beobachtungen des Planeten in seinem Aphelium und Perihelium berechnen, so fände man dadurch die Excentricität der Bahn. Nun sind zwar unter den 12 akronychischen Beobachtungen keine, wo sich der Planet in jenen Oertern, also in 28° ♌ und ♒ befunden hätte, aber es sind 2, die den Mars wenigstens in der Nähe dieser Punkte zeigen, die eine in 21° ♌ in der Nähe des Apheliums, die andere in 12° ♓ in der Nähe des Periheliums. Es sei (Fig. XIV) *b* die Erde, *a* die Sonne, *ad* falle in 21 ♌, die Sonne erscheint in Opposition mit dem Mars, in 21 ♒, und von ihrem Apogäum, das Tycho in 5° ♋ setzt, 134° entfernt; das giebt nach Tycho eine Entfernung der Sonne von der Erde etwa = 97500; die Erde ist dann also nach dem Copernikanischen System in 21° ♌ 97500 von der Sonne entfernt, der Radius des Sonnen- oder Erdkreises = 100000 gesetzt; *ab* also = 97500; die gäocentrische Breite des Mars *hbd* ist = 4°, 32′, 10″ beobachtet; der ∢ bei *à had* oder die heliocentrische Breite des Mars ist aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck *ARC* zu berechnen, wo *C* der Knoten der Marsbahn ist, der ∢ bei *C* der Inclinationswinkel, α die Entfernung des Planeten vom Knoten und γ die heliocentrische Breite; *sin* γ = *sin* α. *sin* C; der Knoten fällt in 16½ ♉, der Planet selbst in 21 ♌; also ist α 94° 30′; der Inclinationswinkel C ist = 1° 50′; *sin* γ = *sin* 94° 30′; *sin* 1° 50′ = *sin* 1° 49′ 31″; also ist γ oder der Winkel *had* = 1° 49′ 31″; der Winkel *bda* aber ist *hbd* — *bad* = 4° 32′ 10″ — 1° 49′ 31″ = 2° 42′ 39″; *ad* ist nun $ab \cdot \frac{\sin b}{\sin d}$ = nahezu 163000.

Nun ist aber *ad*, das in 21 ♌ fällt, noch um 7 — 8° vom Aphelium des Mars, das in 28° 48′ 55″ fällt, entfernt, ist also noch etwas kürzer als die eigentliche Entfernung des Planeten im Aphelium von der Sonne; nimmt man in der hypothesis vicaria (Fig. XIII) *sf* = 163000 und *fsp′* = 7½°, so berechnet sich *sp′* auf 163150. Auf dieselbe Weise wird die Entfernung des Mars im Perihelium *ae* = 139000 gefunden.

Die Summe von *ad* + *ae*, 163150 + 139000, = 302150 ist der Durchmesser, die Hälfte derselben = 151075 der Radius,

die Hälfte der Differenz = 12075 die einfache Excentricität der Bahn. Hier ist die Excentricität im Masse des Radius der Erdbahn ausgedrückt, bei der Auffindung der Hypothesis vicaria wurde sie im Masse des Radius der Marsbahn ausgedrückt; um diese Werthe zu vergleichen, wollen wir jene Grösse 12075 auf das Mass des Radius der Marsbahn zurückführen. Der Radius der Marsbahn, im Masse des Radius der Erdbahn = 100000, war = 151075. Setzen wir nun jenen = 100000, so verhält sich 151075: 100000 = 12075: 8000 nahezu. Kepler hat nach eigener Rechnung die Entfernung der Erde in 21 ♌ von der Sonne, *ab*, etwas grösser und umgekehrt die Entfernung *ac* kleiner gefunden als Tycho. Jedenfalls würde das Maximum von *ab* und das Minimum von *ac* der Radius selbst = 100000 sein; setzt man diesen Werth für *ab* und *ac* ein, so ergiebt sich als Maximum für *ad* 167350, als Minimum für *ae* 137080, daraus als Grenzwerth der Excentricität 15135 im Masse der Erdbahn, im Masse der Marsbahn = 9943. Jedenfalls liegt also hiernach die Excentricität zwischen den Werthen 8000 und 9943. Nach der stellvertretenden Hypothese war dieselbe aber = 11332; der aus dieser berechnete Werth steht also mit dem aus unmittelbarer Beobachtung gefundenen Werthe in Widerspruch und wird desshalb falsch sein. Ptolemäus hatte nun den Mittelpunkt der Bahn gerade in die Mitte zwischen die Erde und das punctum aequans gelegt. Das arithmetische Mittel aber zwischen den Grenzwerthen 8000 und 9943 ist $8971^1/_2$, also rund 9000, und die Hälfte der zusammengesetzten Excentricität [die = 18564] ist = 9282, nicht gar viel von 9000 verschieden. Wie? wenn Ptolemäus Recht hätte, und die zusammengesetzte Excentricität das Doppelte von der einfachen wäre? Wenn man aber dies Verhältniss in die hypothesis vicaria einführt, so berechnen sich zwar die Oerter um die mittlern Entfernungen von der Sonne richtig, bei denjenigen jedoch, welche in der Nähe der Apsides liegen, kann sich eine Differenz zwischen dem berechneten und beobachteten Orte von 8′ ergeben.

Es sei nämlich Fig. XV *acbh* die Linie der Apsis, *a* die Sonne, *c* der Mittelpunkt, *b* das punctum aequans der Marsbahn, *f* ein Ort in der Nähe des Apheliums, etwa der, in

den der Planet am 28. Decbr. 1582 aus einer akronychischen Beobachtung zu versetzen war, in 16° 55′ 30″ ♋

Die anomalia media war damals 310°, 44′, 23″; d. h. der concave Winkel *hbf* = 49° 15′ 37″′. Das Aphelium fällt in 4ˢ 28° 44′ 27″; also *bf* in 3ˢ 9° 28′ 50″. Es kommt also darauf an, aus *hbf*, dem Radius *cf* = 1, *bc* = *ac* = 0, 09282 [oder dem Radius = 100000 und *bc* = *ac* = 9282] die anomalia coaequata *haf* oder α zu berechnen und zu sehn, ob danach *af* auch in 3ˢ 16° 55′ 30″ fällt. Es ist

1. $log\ sin\ \gamma = log\ sin\ b + log\ bc - log\ fc$
$= log\ 49^0\ 15'\ 37'' + log\ 0,\ 09282 - log\ 1,$
$= 9,\ 8794870 + 0,\ 9676416 - 2 - 0$
$= 8,\ 8471286,$ also
$\gamma = 4^0\ 1'\ 58''.$ ausserdem ist
$\delta = \beta + \gamma = 180^0 - 49^0\ 15'\ 37'' + 4^0\ 1'\ 58'' = 134^0\ 46'\ 21''.$
$\alpha + \gamma' = 180^0 - \delta = 45^0\ 13'\ 39''.$

2. $lg\ tg\ ½\ (\alpha - \gamma') = lg\ tg\ ½\ (\alpha + \gamma') + lg\ (fc - ac) - lg\ (fc + ac)$
$= lg\ tg\ 22^0\ 36'\ 49'' + lg\ 0,90718 - lg\ 1,09282$
$= 9,6196552 + 0,9576935 - 1 - 0,0385486$
$= 9,5388001,$ woraus
$½\ (\alpha - \gamma') = 19^0\ 4'\ 27''$
$½\ (\alpha + \gamma') = 22^0\ 36'\ 49''$

---

haf oder α, der grössere Winkel,
$= 41^0\ 41'\ 16''$

Da nun *ah* in 4ˢ 28° 44′ 27″ ♌ fällt, und *af* um 41° 41′ 16″ rückwärts nach d. Präced. d. Zeich., so fällt dies. in 3ˢ 17° 3′ 11″
nach der Beobachtung fiel der Mars aber in 3ˢ 16° 55′ 30′

Also ergiebt sich eine Differenz von 0° 7′ 41″.

Ptolemäus vernachlässigt eine solche Differenz; Tycho aber hatte das Maximum des Beobachtungsfehlers auf etwa 2′ reducirt. Kepler schloss desshalb aus jener Differenz von etwa 8′, dass auch bei dem Verhältniss der zusammengesetzten Excentricität zur einfachen = 2 : 1 oder, wie er es nennt, bei der Bisection der ganzen Excentricität seine hypothesis vicaria falsch wäre. Man sieht hier recht deutlich, welches

Verdienst Tycho durch seine Verfeinerung der Beobachtung sich erworben. Kepler sagt, dass diese Differenz von etwa 8' die Veranlassung für ihn gewesen ist, einen neuen Weg einzuschlagen, auf dem er zur Begründung einer naturgemässen Astronomie gelangt ist.

Aber zweitens ergiebt sich auch ein anderes Resultat für die Excentricität als bei der hypothesis vicaria, wenn man die Oerter des Mars in der Nähe seines Apheliums und Periheliums auch bei einer andern Configuration als der Opposition mit der Sonne beobachtet und mit Hülfe der gäocentrischen Breite und Länge und der Entfernung der Erde an ihren beiden Oertern von der Sonne die Entfernungen des Mars in seinem Aphelium und Perihelium und daraus die Excentricität berechnet. Kepler fand auf diese Weise die Excentricität zwischen 8377 und 10106. Auch hier nähert sich das arithmetische Mittel $9241^1/_2$ der Hälfte der bei der hypothesis vicaria gefundenen zusammengesetzten Excentricität [die ganze = 18564, die Hälfte = 9282]. Er vermuthet aus dieser ungefähren Uebereinstimmung der beiden mehr unmittelbar aus der Beobachtung gefundenen Werthe der einfachen Excentricität, dass dieselbe wirklich einen verwandten Werth haben möchte; und schliesst aus der Abweichung beider von der Excentricität der stellvertretenden Hypothese, dass diese falsch ist. Da nun aber die Beobachtungen, die der hypothesis zu Grunde liegen und die Rechnungen, durch die die Excentricitäten gefunden worden, richtig sind, so müssen die Prämissen, d. h. die Kreisbahn und die Existenz eines besondern festen punctum aequalitatis, entweder beide oder wenigstens eine von beiden, falsch sein. Und damit nicht etwa der Fehler darin gesucht wird, dass er die Excentricität von der Sonne selbst aus rechnet, so beweist er durch Rechnung, dass auch bei der Ptolemäischen und Tychonischen Hypothese die Excentricität verschiedene Werthe ergiebt, je nachdem man sie aus den akronychischen oder ausserakronychischen Beobachtungen berechnet. Es bliebe nur noch der Ausweg übrig, das punctum aequans auf der Apsis sich bewegen zu lassen, aber das widerstreitet der Einfachheit der Natur. Darum gibt Kepler die eine Prämisse eines besondern punctum aequans

auf. Es gibt keinen Punkt, um den der Planet sich gleichmässig bewegt; er bewegt sich nur symmetrisch zur Linie der Apsis.

Der zweite Grundgedanke oder das punctum aequans bei der Erdbahn und das erste Gesetz.

Die Verschiedenheit des Mittelpunktes und des punctum aequans bei der Erdbahn.

Kepler hatte die Falschheit seiner stellvertretenden Hypothese und die der frühern Hypothesen überhaupt durch die Messung der Entfernungen des Mars im Aphelium und Perihelium von der Sonne gefunden. Diese Messung geschah durch die Entfernung der Erde von der Sonne und der gäocentrischen Breite des Mars, also durch Erscheinungen der zweiten Ungleichheit, deren Grund die Bewegung der Erde um die Sonne ist. Es lag also in dem Gange der Forschung, diese Bewegung, d. h. die Bahn der Erde, eher zu ergründen, bevor er in der Auffindung der wahren Marsbahn weiter gieng. An diese Forschung trat er nun mit dem zweiten seiner bewegenden Gedanken heran, dass die Erdbahn [oder Sonnenbahn] auch ein besonderes punctum aequans habe, während die Früheren das punctum aequans und den Mittelpunkt der Bahn zusammenlegten. Er hat zwar durch die bisherige Induction das Vorhandensein eines solchen Punktes in der Natur der Dinge widerlegt, aber es war ein geometrisches Hülfsmittel, um die stetig veränderliche Bewegung des Planeten auszudrücken, und bis Kepler das wahre physikalische Gesetz dieser stetigen Veränderung fand, behielt er jenes Hülfsmittel bei, um dieselbe mathematisch darzustellen. Richtiger würden wir desshalb sagen, sein Gedanke wäre gewesen, dass ein besonderes punctum aequans ebensogut der Erdbahn zukäme, als den Bahnen der andern Planeten. Dies beweist er auf zweierlei Weise.

1. Tycho de Brahe hatte ihm geschrieben, dass der Kreis der Sonne grösser und kleiner zu werden scheine. Es schien ihm unmöglich, dass das in einer wirklichen Veränderung der Grösse des Radius seinen Grund hätte, und es kam ihm sogleich der Gedanke (sein Genius, sagte er, hätte es ihm eingegeben), dass dieser Schein in der falschen An-

nahme seinen Grund hätte, dass der Mittelpunkt der Erdbahn und das punctum aequans identisch seien. Es sei (Fig. XVI) *ox* der Kreis der Erde oder Sonne. Nach Ptolemäus, Kopernikus und Tycho war also das punctum aequans *b* zugleich der Mittelpunkt der Bahn, nach Kopernikus zugleich der Indifferenzpunkt oder gemeinschaftliche visus aller Planetenbewegungen, und er bezog darauf also sowohl die mittleren Oerter wie die loci coaequati der Bahn *ox*. Erscheint nun der Mars 2 Mal an demselben locus coaequatus *p* und findet beide Mal eine solche Configuration mit der Erde in *g* und *f* statt, dass $\sphericalangle fbp = \sphericalangle gbp$ oder dass die anomaliae commutationis = sind, so muss, wenn *b* auch Mittelpunkt des Kreises ist, $bf = bg$ und damit das $\triangle fbp \cong \triangle gbp$, also auch $\sphericalangle fpb$ und *gpb* oder die Parallaxen des Mars gleich sein. Ist aber *b* nicht der Mittelpunkt, sondern nur das punctum aequans und liegt der Mittelpunkt, wie bei den andern Planeten, von *b* nach der Sonne *a* zu, in *c*, so ist *bf* grösser als *bg* und desshalb auch die Parallaxe $fpb > bpg$. Beobachtet man nun $fpb > gpb$ und bleibt dabei stehn, dass *b* auch der Mittelpunkt ist, so kann man dazu kommen, eine wirkliche Vergrösserung des Radius *bf* in der Gegend des Periheliums *q'* anzunehmen.

Will man den Unterschied der Parallaxen beobachten, so darf derselbe nicht zu klein sein. Der grösste Unterschied findet Statt, wenn das eine Mal die Erde im Aphelium *q*, das andere Mal im Perihelium *q'*, der Mars in der Mitte *p'* stände, so dass die anomaliae commentationis *RR* wären. Diese Constellation wird nun bei dem so wenig einfachen Verhältnisse der beiden periodischen Zeiten uns nicht vergönnt sein zu beobachten, aber es halfen ihm auch hier die reichen Tychonischen Tafeln aus. Nach welchem Gesichtspunkt sollte er die passende Beobachtung suchen?

Die bequemste Constellation würde also die sein, wo die Erde im Aphelium und Perihelium, in ♑ und ♋, und der Mars um 90° davon entfernt, also in der ♎ wäre. Er suchte also unter den Beobachtungen des Mars in der Wage. Aber wann mussten sie gemacht sein, um diese Constellation mit der Erde aufzuweisen?

Der Mars kehrt in 687 Tagen an seinen locus coaequatus zurück; die Erde macht in dieser Zeit zwei Umdrehungen weniger 42 ° 54 ′ 23 ″ (denn dieser Bogen entspricht bei ihr der mittleren Bewegung von $2 \cdot 365^1/_4$ — 687 Tagen = $43^1/_2$ Tagen). Für jede Revolution des Mars beträgt also die Veränderung der anomalia commutationis 42° 54 ′ 23 ″; soll der Mars also 2 Mal innerhalb zweier Jahre an demselben locus coaequatus von der Erde aus so gesehn werden, dass die anomaliae commutationis gleich sind, so müssen dieselben beide Mal 21 ° 27 ′ ($11^1/_2$ ″) betragen. Für die gleichen Commutationen von 42 ° 54 ′ sind 4 Jahre erforderlich, für die von 64 ° 21 ′ 6 Jahre, für die von 85 ° 48 ′ 8 Jahre u. s. w. Die letztere Commutation ist der von 90 ° am nächsten, aber es fand sich kein solches Paar von Beobachtungen bei Tycho, wol aber unter den 6 Jahre von einander abstehenden Beobachtungen.

Im Jahre 1585, 18. Mai, fiel die Linie

bp in 13 ° 28 ′ ♎
bg in 9 ° 5 ′ ♌

∢ *pbg* also = 64 ° 23 ′.

Im Jahre 1591, den 22. Januar, war der Mars an demselben locus coaequatus. Es fiel also wieder

bp in 13 ° 28 ′ ♎
bf in 17 ° 51 ′ ♐

∢ *pbf* also = 64 ° 23 ′.

Die Winkel *pbg* und *pbf* waren also gleich. Die Gesichtslinien von der Erde aus nach dem Mars fielen aber:

fp in 21 ° 34 ′ ♏
bp in 13 ° 28 ′ ♎

fpb also = 38 ° 6 ′.

gp in 6 ° 37 ′ ♍
bp in 13 ° 28 ′ ♎

gpb also = 36 ° 51 ″.

fpb war also grösser als *gpb*, desshalb auch *bf* grösser als *bg*. Behält man *b* als Mittelpunkt bei, so ist der Radius entweder wirklich grösser geworden oder der Mittelpunkt hat sich auf der Apsis nach dem Aphelium *q* hin bewegt. Beides aber widerstreitet der Einfachheit der Natur. Desshalb ist *b* nicht der Mittelpunkt, sondern nur das punctum aequans.

2. beweist Kepler die Verschiedenheit des Mittelpunktes und des punctum aequans bei der Erdbahn durch die Verschiedenheit der Entfernungen der Oerter der Erde von jenem Punkte. Die Messung dieser Entfernungen ist eine geniale Ausbeutung der Reichthümer des Kopernikus, die dieser selbst, wie Kepler sagt, nicht kannte. Zwar hatte auch Tycho die verschiedenen Entfernungen der Oerter der Sonne von der Erde aufgestellt; aber nicht durch Beobachtung, sondern aus der vorausgesetzten Excentricität des Sonnenkreises berechnet. Durch Beobachtung konnte man natürlich kosmische Entfernungen der Erde nur finden, wenn man die Erde sich bewegen liess; ohne Veränderung des Standpunktes kann man keine Entfernungen messen. Die sinnige Art und Weise, wie er diese Messungen machte, ist folgende: Er nahm als gemeinschaftliches Mass der Entfernungen die Entfernung des Mars von dem Mittelpunkte der Erdbahn. Er beobachtete also denselben locus coaequatus des Mars von verschiedenen Orten der Erde und berechnete dann aus jener Entfernung des Mars als Einheit und den verschiedenen Parallaxen die jedesmalige Entfernung der Erde von demselben Punkte. Es sei (Fig. XVII) β die Sonne, α der als Mittelpunkt und punctum aequans betrachtete Punkt. Nun sei der Mars von dem Orte der Erde ϑ aus in π gesehen. Da die siderische Umlaufszeit des Mars = 687 Tage ist, so weiss man, dass er nach Verlauf dieser Zeit wieder an demselben Orte seiner Bahn ist. Alsdann ist die Sonne an einem andern Orte ihrer Bahn, es sei in η; ebenfalls nach 687 Tagen ist der Mars wieder in π, die Erde aber an einem andern Orte, in ε, zum vierten Mal sei sie in ζ. Von allen diesen Punkten aus wird der Mars in π immer unter besondern Parallaxen gesehn (die $\sphericalangle\ \vartheta\pi\alpha$, $\varepsilon\pi\alpha$ u. s. w.). Da nun aber die Erde um α in gleichen Zeiten gleiche Winkel beschreibt, so hat sie in der gleichen Periode von 687 Tagen[6]) zwischen ϑ und η, η und ε, ε und ζ immer gleiche Winkel um α beschrieben; die $\sphericalangle\ \vartheta\alpha\eta$, $\eta\alpha\varepsilon$, $\varepsilon\alpha\zeta$ sind also gleich und gegeben, die ganzen Winkel $= \frac{687}{365\,1/4} \cdot 360^0$, woraus man die concaven durch Abziehen der ganzen und halben Umdrehungen

360 ° und 180 ° bekommt. Es sei nun die longitudo coaequata des Mar s(die heliocentrische Länge, wenn man von der Sonne rechnete) im Jahre 1590, den 5. März, 7 Uhr Abends in 15 ° 53′ 45″ ♉; dann wird er nach Ablauf der Periode: 1592, den 21. Januar 6 Uhr Abends; 1593, den 8. Decbr. 6 Uhr Abends; 1595, den 26. October 5 Uhr A. wieder an demselben Orte sein. Der mittlere Ort der Erde sei 1590 in ϑ, 1592 in η, 1593 in ε, 1595 in ζ.

αϑ fiel in 22 ° 59′ ♍
αη „ „ 10 ° 6′ ♌
αε „ „ 27 ° 13′ ♊
αζ „ „ 14 ° 20′ ♉

oder der mittlere Ort der Sonne in

22 ° 59′ ♓
10 ° 6′ ♒
27 ° 13′ ♐
14 ° 20′ ♏

απ also in 15 ° 53′ 45″ ♉
αϑ „ 22 ° 59′ ♍

∢ ϑαπ also = 127 ° 5′ 15″.

Nun wurde der Mars von der Erde aus gesehn am 5. März 1590 in 25 ° 6′ ♈

ϑπ fiel also in 25 ° 6′ ♈ [7])
απ „ „ 15 ° 53′ 45″ ♉

∢ απϑ = 20 ° 47′ 45″.

Der dritte Winkel des Dreiecks αϑπ ist also = 2 R — (∢ α + ∢ π) = 32 ° 7′ 14″. Es verhält sich nun

αϑ : απ = *sin* απϑ : *sin* αϑπ. Setzt man απ = 100000,

so ist $\alpha\vartheta = \frac{sin\ \vartheta}{sin\ \pi} \cdot 100000 = 66774.$

Ebenso wird αη berechnet. απ muss nur der Präcession der Nachtgleichen wegen nach 15 ° 55′ 23″ ♉ vorgerückt werden. Der Winkel ηαπ ist = 84 ° 10′ 34″; ηπ fällt in 10 ° 9½′ ♈, ηπα also = 35 ° 46′ 23″; αηπ = 60 ° 3′ 3″. Hieraus αη = 67467; αε berechnet sich auf dieselbe Weise

= 67794, $\alpha\zeta$ = 67478 [7]). Die Punkte der Peripherie des Erdkreises sind also nicht gleichweit von α entfernt, sondern der mittlere Ort

in 22 ° 59′ ♍ = 66774
„ 10 ° 6′ ♌ = 67467
„ 27 ° 13′ ♊ = 67794
„ 14 ° 20′ ♉ = 67478

Da nun das Perihelium der Erde in 5½ ♋ (φ) ist, das Aphelium in 5½ ♑ (φ'), so wird die Entfernung der Erde von α nach dem Perihelium zu grösser, nach dem Aphelium zu kleiner; α ist also nicht der Mittelpunkt des Erdkreises, sondern dieser liegt vom Aphelium (φ') weiter, vom Perihelium (φ) näher als α; α kann man nur als punctum aequans beibehalten; und der Mittelpunkt liegt zwischen ihm und der Sonne (zwischen α und β). Und damit ihm nicht einer einwerfe, dass diese Verschiedenheit der Entfernungen vom Kopernikanischen System herkomme, so beweist er dasselbe für das Ptolemäische und Tychonische System.

Die Entfernung des Mittelpunktes und des punctum aequans.

Nachdem also bewiesen ist, dass der Mittelpunkt und das punctum aequans ebensogut beim Kreise der Erde von einander verschieden sind als bei den Kreisen der übrigen Planeten, drängt sich die weitere Frage auf, wie weit diese beiden Punkte von einander entfernt sind oder wie sich die einfache und zusammengesetzte Excentricität zu einander verhalten. Tycho setzte die Excentricität des Sonnenkreises = 3584, für den Radius = 100000, das heisst: so weit war der Punkt von der Erde oder Sonne entfernt, den Tycho und Kopernikus für den Mittelpunkt zugleich und das punctum aequans des orbis magnus halten. Es fragt sich, wie weit das besondere punctum aequans vom Mittelpunkt entfernt ist.

1. Das erste Schema, woraus das Vorhandensein eines besondern punctum aequans bewiesen, weist 2 Sonnenbeobachtungen auf; da 3 Punkte zur Bestimmung des Kreises nöthig sind, nimmt Kepler das Tychonische Apogäum zu Hülfe.

Dieser setzt dasselbe in $5^1/_2$ ♋ und das Perigäum in $5^1/_2$ ♉; bei der Kopernikanischen Ordnung muss also das Aphelium in $5^1/_2$ ♉ und das Perihelium in $5^1/_2$ ♋ gelegt werden. Es war nun (Fig. XVI) $fbp = 64^0\ 23'\ 30''$ und eben so $gbp = 64^0\ 23'\ 30''$. $\sphericalangle\ fpb = 38^0\ 6'$, $gpb = 36^0\ 51'$ also $pfb = 77^0\ 30'\ 30''$ und $pgb = 78^0\ 45'\ 30''$. Daraus ergibt sich das Grössenverhältniss von bf und bg zu einander. Denn bp als Mass = 100000 genommen, ist

$$bf = \frac{sin\ fpb}{sin\ bfp} \cdot pb = 63186$$

$$bg = \frac{sin\ gpb}{sin\ bgp} \cdot pb = 61148$$

Ist desshalb (Fig. XVIII) oo' der Kreis der Erde, b das punctum aequans, c der Mittelpunkt, $\pi\pi'$ die Linie der Apsis, g, f die beiden Oerter der Erde, bx und cy senkrecht zu gf, gr senkrecht zu bf, so sind in dem Dreieck gbf der $\sphericalangle\ gbf = 2 \times 64^0\ 23'\ 30'' = 128^0\ 47'$, die Linien $gb = 61148$ und $bf = 63186$ bekannt; daraus ergibt sich $gfb = 25^0\ 9'\ 20''$, $gf = 112125$ und die Hälfte davon fy und $yg = 56062^1/_2$, der $\sphericalangle\ fgb = 26^0\ 3'\ 21''$. Daraus wiederum ist das rechtwinklige Dreieck gbx bestimmt aus gb und $\sphericalangle\ fgb$ und desshalb auch $bx = 26858$ und $xg = 54932$; xy also $= gy - gx$ $(56062^1/_2 - 54932) = 1130^1/_2$. Zieht man nun von x eine Parallele zu $bc \parallel xz$, so ist das $\triangle\ xyz$ auch bestimmt aus xy und dem $\sphericalangle\ yxz$. Denn man denke sich fg und $\pi\pi'$ verlängert, bis sie sich schneiden, so ist der dann entstehende $\sphericalangle = yxz = fgb - gb\pi'$. Nun fällt $b\pi'$ in $5^1/_2{}^0$ ♉, bg in $17^0\ 51'$ ♐; also ist $gb\pi' = 17^0\ 38'$; fgb war $= 26^0\ 3'\ 21''$, also die Differenz $= yxz = 8^0\ 25'\ 21''$. So ergibt sich $xz = bc = 1143$.

Man muss nun noch den Radius gc berechnen, um dann das Verhältniss $\frac{bc}{gc}$ zu haben.

Da das $\triangle\ xyz$ bestimmt ist, so ist auch yz bekannt $=$ 167, und da $cz = bx = 26858$, so ist die Summe $cz + zy = cy = 27025$. Dadurch ist also auch das rechtwinklige $\triangle\ gcy$ bestimmt (aus gy und yc), und daraus der Radius

$gc = 62237$. Wird dieser also nun $= 100000$ genommen, so ist die Entfernung der beiden Punkte $bc = \frac{100000 \cdot 1143}{62237}$ $= 1837$. Die Entfernung des Punktes b von der Sonne betrug nun nach Tycho 3584, die Hälfte davon $= 1792$ weicht nicht sehr von 1837 ab; der letztere Werth würde auch noch kleiner sein, wenn die Präcession der Nachtgleichen bei dem Erdorte f berücksichtigt wäre. Es ist also die Wahrscheinlichkeit sehr gross, dass auch hier der Mittelpunkt in der Mitte zwischen der Sonne und dem punctum aequans liegt, oder dass die einfache zur zusammengesetzten Excentricität sich $= 1 : 2$ verhält. Kepler nennt dieses Verhältniss die Bisection der ganzen Excentricität. Diese Bisection nun zur Gewissheit zu erheben, ist Keplers eifriges Bestreben, weil darauf sein Beweis für das Verhältniss der Beschleunigung zur Entfernung von der Sonne beruht. Er untersucht daher die Excentricität des Erdkreises noch auf andere Weise.

2. Das andere Schema bietet 3 Oerter der Erde von dem als punctum aequans zugleich und Mittelpunkt betrachteten Punkte zur Benutzung. Man kann daraus die Excentricität und die Lage der Apsislinie berechnen.

Es sei (Fig. XIX) α jener Mittelpunkt des Planetensystems, das punctum aequans des orbis magnus, β das Centrum desselben; ϑ, η, ε die gegebenen Oerter, gesucht wird die Grösse der Linie $\alpha\beta$ und die Lage derselben, der Winkel $\vartheta\alpha\beta$. Da die Entfernungen $\alpha\vartheta$, $\alpha\eta$, $\alpha\varepsilon$ im Masse der Entfernung jenes Marsortes von α im Vorhergehenden gefunden, ebenso die den Zwischenzeiten zwischen den Beobachtungen proportionalen Winkel in α, $\vartheta\alpha\eta$, $\eta\alpha\varepsilon$ bekannt sind, so ist klar, dass folgende Grössen bestimmt sind.

1. $\triangle\ \vartheta\alpha\eta$ aus $\sphericalangle\ \alpha$ und den Linien $\vartheta\alpha$ und $\eta\alpha$, daraus kann $\vartheta\eta$ berechnet werden.
2. $\triangle\ \alpha\varepsilon\eta$ aus den homologen Stücken; woraus der Winkel $\alpha\varepsilon\eta$ berechnet werden kann.
3. $\triangle\ \vartheta\alpha\varepsilon$ ebenso, dadurch wird berechnet $\sphericalangle\ \alpha\varepsilon\vartheta$.
4. $\sphericalangle\ \alpha\varepsilon\eta - \sphericalangle\ \alpha\varepsilon\vartheta = \vartheta\varepsilon\eta$.

5. Das Doppelte von dem Peripheriewinkel $\vartheta\varepsilon\eta$ ist der Centriwinkel $\vartheta\beta\eta$.
6. Das gleichschenklige Dreieck $\vartheta\beta\eta$ ist also bestimmt aus einer Seite $\vartheta\eta$ und dem $\sphericalangle$ $\vartheta\beta\eta$, und es kann also daraus der Radius $\vartheta\beta$ und der $\sphericalangle$ $\beta\vartheta\eta$ berechnet werden.
7. Aus dem $\triangle$ $\vartheta\alpha\eta$ war aber auch der $\sphericalangle$ $\alpha\vartheta\eta$ bekannt, und da $\sphericalangle$ $\alpha\vartheta\eta - \beta\vartheta\eta = \sphericalangle$ $\alpha\vartheta\beta$, so ist
8. das $\triangle$ $\alpha\vartheta\beta$ aus $\alpha\vartheta$ und $\vartheta\beta$ und dem $\sphericalangle$ $\alpha\vartheta\beta$ bestimmt, und es kann mithin sowohl die Grösse von $\alpha\beta$, als der $\sphericalangle$ $\vartheta\alpha\beta$ berechnet werden.

Kepler berechnet auf diese Weise $\alpha\beta = 1530$ im Masse des Radius der Erdbahn $= 100000$; die wahre Bisection der Tychonischen Excentricität wäre 1796; da aber die Berechnungen der Entfernungen $\alpha\vartheta$, $\alpha\eta$ u. s. w. sich auf Parallaxenbeobachtungen gründen, die unter der Voraussetzung, dass der Mittelpunkt des orbis magnus, nicht die Sonne selbst, der Indifferenzpunkt der Bewegung wäre, gemacht sind, und diese Parallaxen von den Keplerschen merklich abweichen können, da ferner loci coaequati aus hypothetischen Excentricitäten abgeleitet sind, und die Sinne selbst nie der Wirklichkeit ganz beikommen, so freut sich Kepler, dass die Werthe 1530 und 1796 noch so genau zusammenstimmen und wird durch die Differenz nur ermuntert, genauere Untersuchungen anzustellen, um die Bisection bestätigt zu finden.

3. berechnet Kepler nun die Excentricität des Erdkreises unter der Voraussetzung, dass die Sonne selbst der Regulator der Bewegungen ist, dass man also sowohl die Erdörter als den periodischen Ort des Mars auf die Sonne selbst zurückführen, also von da die Anomalien und die Entfernungen rechnen müsse. Zu diesem Zwecke führt er also die benutzten Tychonischen Längen auf die Sonne als visus selbst zurecht. Er hatte bei der Berechnung der Entfernungen der Erde von α auf dem Tychonischen eccentricus nicht den Ort des Mars vom 4. März 1590 Abends 7 Uhr 10′, dessen Parallaxe wirklich gesehn war, benutzt, sondern den Ort, den der Mars Einen Tag später einnahm, weil dieser von der gäocen-

trischen Breite frei war. Jetzt nimmt er den Ort vom 4. März 1590 Abends 7 Uhr 10 Minuten, dessen gäocentrischer Ort ganz genau beobachtet war in 24′ 20′ ♈. Dann ist der Mars an demselben Orte seiner Bahn wieder

1592, 20. Januar, 6 Uhr 45′
1593, 7. Decbr., 6 Uhr 15′
1595, 25. Octbr., 5 Uhr 45′.

1595 nun, 25. Octbr., 5 U. 45′ war der wahre heliocentrische, d. i. der auf die Sonne selbst als ruhenden visus zurückgeführte Ort 14° 19′ 52″ ♉ (1ˢ). Die Präcession der Nachtgleichen beträgt in einer Marsperiode 1′ 36″; also müssen die früheren Oerter um so viel in praecedentiam signorum zurückverlegt werden, also für 1593 in 14° 18′ 16″; 1592 in 14° 16′ 40″; 1590 in 14° 15′ 4″ ♉. Die verschiedenen gäocentrischen Längen dieses Ortes lassen sich leicht aus den Tychonischen Beobachtungen berechnen; z. B. den 23. Jan. 1592 7 Uhr 20′ Abends erschien der Mars in 11° 32′ 44″ ♈; vom 20. Januar 6 Uhr 45′ A. bis dahin ist 3 Tage 35′; in dieser Zeit legte er damals 2° 9′ 4″ zurück; der gäocentrische Ort für den 20. Januar 6 Uhr 45′ ist also 9° 23′ 40″. Nimmt man nun den entsprechenden Ort der Sonne nach den Tychonischen Rechnungen hinzu, so ergibt sich folgende Tafel:

	heliocentr. Ort	gäocentr. Ort	Ort der Sonne
1590. März 4.			
7 U. 10 M. A.	14° 15′ 4″ ♉	24° 20′ ♈	24° 0′ 25″ ♓ Erde: 24° 0′ 25″ ♍
1592. Jan. 20.			
6 U. 45 M. A.	14° 16′ 40″ ♉	9° 24′ ♈	10° 17′ 8″ ♒ Erde: 10° 17′ 8″ ♌
1593. Dcbr. 7.			
6 U. 15 M. A.	14° 18′ 16″ ♉	3° 4½′ ♈	25° 53′ 24″ ♐ Erde: 25° 53′ 24″ ♊
1595. Oct. 25.			
5 U. 45 M. A.	14° 19′ 52″ ♉	19° 42′ ♉	11° 41′ 34″ ♏ Erde: 11° 41′ 34″ ♉

So sind also dieselben Grössen gegeben, wie bei 2, und wie hier die Entfernung des Mittelpunktes des Erdkreises von dessen punctum aequans berechnet wurde, so wird jetzt auf dieselbe Weise die Entfernung des Mittelpunktes von der Sonne selbst berechnet. Ist also (Fig. XIX) jetzt α die Sonne, β das Centrum des Erdkreises, ϑ, η, ε, ζ die Oerter der Erde, π der Ort des Mars, kurzum sonst Alles wie vorher, so berechnet sich im Masse von $\alpha\pi = 100000$

$$\alpha\vartheta = 67467$$
$$\alpha\eta = 66632$$
$$\alpha\varepsilon = 66429$$
$$\alpha\zeta = 67220,$$

alsdann aus $\alpha\vartheta$, $\alpha\varepsilon$ und $\alpha\zeta$ und den bekannten Winkeln ganz wie bei 2 $\alpha\beta = 2516$ (im Masse von $\beta\vartheta = 100000$) und der Winkel $\vartheta\beta\alpha = 68^0\ 26'\ 7''$, d. h. es fällt $\beta\alpha$ in $15^0\ 34'\ 18''$ ♋; dahin wäre also das Perihelium zu legen und das Aphelium in $15^0\ 34'\ 18''$ ♑. Dies Resultat stimmt nicht zu dem früher gewonnenen, wo die Excentricität = 1530 berechnet wurde. Diese grosse Differenz kommt aber nur von der Mangelhaftigkeit der Beobachtungen. Denn rückt man die Linie $\alpha\pi$ nur um Eine Minute vor, so fällt das Perihelium in $7^0\ 23'$ ♋ und die Excentricität wird = 1880; und verlegt man dazu die Linie $\alpha\zeta$ nur um $^1/_2$ Minute in $19^0\ 41^1/_2'$ ♉, so wird das Perihelium in $5^1/_2$ ♋ und die Excentricität = 1800. Da aber das Perihelium sicher in $5^1/_2$ ♋ nach den Beobachtungen zu legen ist, so wird auch die Excentricität = 1800 sein.

4. Da es sich herausgestellt hat, wie der Unterschied von 1 Minute der heliocentrischen Länge des benutzten Marsortes den Werth der Excentricität beeinträchtigt, so sucht er den heliocentrischen Ort des Mars auf folgende Weise sicher zu bestimmen. Er nimmt (Fig. XX) einen Ort des Mars π mit 4 gäocentrischen Beobachtungen (von ε, ζ, η, ϑ) und gibt π eine aus seiner hypothesis vicaria und der Tychonischen Beobachtung berechnete heliocentrische Länge. Da nun auf der Sehne $\varepsilon\eta$ 2 Winkel stehn, $\varepsilon\zeta\eta$ und $\varepsilon\vartheta\eta$, so sind diese einander gleich, und die für dieselben mit Hülfe der

heliocentrischen Länge von $\alpha\pi$ berechneten Werthe müssen also dieselben sein. Differiren diese Werthe nun von einander, so ist die heliocentrische Länge zu verändern, sei es zu vermehren oder zu vermindern, und zwar so lange, bis für die beiden Winkel sich derselbe Werth ergibt. Alsdann wird wie früher die Excentricität berechnet. Auch diese Rechnung fällt für die Excentricität = 1800 günstig aus. Nachdem er nun noch

5. die umgekehrte Probe gemacht und aus der angenommenen Excentricität = 1800, den daraus berechneten Entfernungen der Erdörter von der Sonne und den diesen Erdörtern entsprechenden gäocentrischen Breiten desselben Marsortes dessen heliocentrische Länge mit hinreichender Uebereinstimmung berechnet hat, schliesst er daraus mit Sicherheit, dass der Mittelpunkt des Erdkreises 1800 von der Sonne entfernt ist (der Radius = 100000) und dass also, da nach Tycho die zusammengesetzte Excentricität 3600 beträgt, der Mittelpunkt zwischen der Sonne und dem punctum aequans in der Mitte liegt. Die Bisection also der ganzen (zusammengesetzten) Excentricität, die Ptolemäus für die 3 äusseren Planeten annahm und die Kepler für den Mars gerettet hatte, hat er auch für die Erdbahn bewiesen; für den Merkur und die Venus wird ihm ein besonderes punctum aequans dadurch wahrscheinlich, weil er darin den Grund der Annahme vermuthet, dass der Mittelpunkt der Bahnen dieser Planeten einen kleinen Kreis beschreibe; die Bisection wird aber durch die Analogie auch bei diesen ebenso wahrscheinlich; kurzum die Bisection oder das Verhältniss der einfachen zur zusammengesetzten Excentricität wie 1 : 2 kann man als eine allen Planeten gemeinsame Eigenschaft betrachten. Hieraus ergeben sich aber für das Wesen der planetarischen Bewegung die wichtigsten Folgerungen.

Das erste Gesetz.

Dass in der Verschiedenheit des punctum aequans vom Mittelpunkt die Andeutung lag, dass die Schnelligkeit des Planeten von seiner Entfernung von der Sonne abhängig ist, hatte Kepler, wie wir gesehn, schon in seinem mysterium

cosmographicum ausgesprochen. Jetzt aber, wo er das Verhältniss der Entfernungen dieser beiden Punkte von der Sonne wie 2 : 1 gefunden, leitet er daraus das Gesetz ab, dass die Geschwindigkeit des Planeten im umgekehrten Verhältniss zur Entfernung desselben von der Sonne stehe. Der Beweis, den er für dies Gesetz giebt, ist folgender:

Es sei (Fig. XXI) α die Sonne, β der Mittelpunkt der Planetenbahn, γ deren punctum aequans, $\varepsilon\beta\delta$ die Planetenbahn, $\upsilon\gamma\varphi$ der circulus aequans, d. h. der mit dem Radius der Planetenbahn aus dem punctum aequans geschlagene Kreis. Der Planet beschreibe nun im Aphelium den Bogen $\delta\psi$, im Perihelium einen andern $\varepsilon\omega$. Verbindet man nun γ mit ψ und verlängert die Linie bis χ, und zieht ebenso $\gamma\tau\omega$, so ist der Bogen $\upsilon\chi$ das Mass für die Zeit, in der der Planet den Bogen $\delta\psi$ und $\varphi\tau$ das Mass der Zeit, in der derselbe den Bogen $\varepsilon\omega$ durchläuft. Es ist also zu beweisen, dass wenn $\delta\psi$ und $\varepsilon\omega$ gleichgenommen werden, die Zeiten sich verhalten wie $\alpha\delta : \alpha\varepsilon$, also die Schnelligkeiten wie $\alpha\varepsilon : \alpha\delta$. Es verhält sich nun, wenn man die Bogen $\varepsilon\omega$, $\psi\delta$ und ebenso $\varphi\tau$, $\chi\upsilon$ sehr klein und als gerade Linie annimmt.:

1. $\gamma\delta : \gamma\upsilon = \delta\psi : \upsilon\chi$ und ebenso

2. $\gamma\varepsilon : \gamma\varphi = \varepsilon\omega : \varphi\tau$. Für $\gamma\upsilon$ und $\gamma\varphi$ kann man auch $\beta\delta$, für $\gamma\delta$ $\alpha\varepsilon$, für $\gamma\varepsilon$ $\alpha\delta$ setzen.

3. ist nahezu $\gamma\delta : \gamma\upsilon$ oder $\beta\delta = \beta\delta : \alpha\delta$; $\beta\delta$ ist nämlich die mittlere arithmetische Proportionale zwischen $\gamma\delta$ und $\alpha\delta$ nach der Construction. Liegen aber die beiden Aussenglieder einer Proportion nahe bei einander, so ist die geometrische mittlere Proportionale von der arithmetischen nur wenig verschieden — die arithmetische nur um ein geringes grösser als die geometrische. — Da nun die Excentricitäten im Verhältniss zu den Radien klein sind, so liegen auch die Werthe des Radius plus der Excentricität und des Radius minus derselben noch nahe genug zusammen, um ihre arithmetische mittlere Proportionale nahezu für ihre geometrische mittlere setzen zu können. Die Proportion ist also nahezu richtig; nur ist das Verhältniss der mittleren arithmetischen Proportionale — da sie etwas grösser ist als die mittlere geometrische — zu dem kleineren Gliede etwas grösser als

das Verhältniss des grösseren Gliedes zur mittleren arithmetischen Proportionale. γv oder $\beta\delta : \gamma\delta$ ist etwas grösser als $\alpha\delta : \beta\delta$.

4. ist nach 1 und 3 $v\chi : \delta\psi$ auch nahezu $= \alpha\delta : \delta\beta$; nur dass das erstere Verhältniss auch um etwas grösser ist als das zweite.

5. ist aus demselben Grunde wie bei 3 $\gamma\varepsilon : \gamma\varphi$ nahezu $= \gamma\varphi$ oder $\beta\varepsilon : \alpha\varepsilon$, nur dass das Verhältniss $\gamma\varepsilon : \gamma\varphi$ etwas kleiner ist als $\beta\varepsilon : \alpha\varepsilon$.

6. ist also auch nach 2 das Verhältniss $\varepsilon\omega : \varphi\tau$ um ein weniges kleiner als $\beta\varepsilon : \alpha\varepsilon$.

Nach 4 ist also das Verhältniss von $v\chi : \delta\psi$ um ein geringes grösser als das von $\alpha\delta : \delta\beta$; das von $\alpha\delta : \delta\beta$ ist aber nach 3 um ein geringes kleiner als $\delta\beta : \gamma\delta$ oder als $\beta\varepsilon : \alpha\varepsilon$; und ebenso ist $\gamma\varepsilon : \gamma\varphi$ um ein geringes kleiner als $\beta\varepsilon : \alpha\varepsilon$. Es ist also das eine Verhältniss $v\chi : \delta\psi$ etwas grösser als das kleinere $[\alpha\delta : \delta\beta]$, das andere $\varepsilon\omega : \varphi\tau$ etwas kleiner als das grössere $[\beta\varepsilon : \alpha\varepsilon]$ von 2 naheliegenden Verhältnissen. Das plus bei jenem compensirt sich also gegen das minus bei diesem Verhältnisse, und es ist genau:

7. $v\chi : \psi\delta = \varepsilon\omega : \varphi\tau$. Nimmt man nun $\psi\delta$ und $\varepsilon\omega$ gleich, so folgt aus 7 und aus den Proportionen 4 und 6: $v\chi : \delta\psi$ wenig $> \alpha\delta : \delta\beta$ und $\delta\psi : \varphi\tau$ wenig $< \beta\delta : \alpha\varepsilon$ die genaue Proportion $8 : v\chi : \varphi\tau = \alpha\delta : \alpha\varepsilon$; d. h.: die Zeiten, die der Planet im Aphelium und Perihelium gebraucht, um denselben Bogen seiner Bahn zu durchlaufen, verhalten sich wie die Entfernungen des Apheliums und Periheliums von der Sonne, oder die Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie diese Entfernungen. Dies Gesetz, das er also für das Aphelium und Perihelium bewiesen hat, dehnt er nach der Analogie auf alle Punkte der Planetenbahn aus, und er nimmt somit an, dass die Geschwindigkeit des Planeten allemal im umgekehrten Verhältnisse zu der Entfernung der Planetenörter stehe. Wir wissen jetzt, dass er einen falschen Schluss der Analogie gemacht hat; die Geschwindigkeiten verhalten sich nicht umgekehrt wie die Entfernungen der Oerter oder Punkte von der Sonne, sondern umgekehrt wie die Entfernungen der

virtuellen Wege eines jeden Punktes, d. h. wie die der Tangenten an denselben, und der gegebene Beweis ist nur desshalb richtig, weil diese beiden Entfernungen für Aphelium und Perihelium zusammentreffen. Doch davon später. Jetzt wollen wir den Gedankengang Keplers weiter verfolgen.

Er schloss nämlich weiter. Wenn die Zeit oder der Aufenthalt [die mora] in jedem Punkte der Bahn sich verhält wie dessen Entfernung von der Sonne, so verhält sich die Summe der Zeiten oder der Aufenthalte in mehreren Punkten wie die Summe der Entfernungen dieser Punkte von der Sonne. Man kann also die Zeit, in der der Planet einen Bogen beschreibt, durch die Summe der Entfernungen aller Punkte dieses Bogens von der Sonne messen. Kenne ich also die Summe aller Entfernungen eines Bogens der Bahn von der Sonne, so kann ich die Zeit berechnen, die der Planet gebraucht, um diesen Bogen zu durchlaufen und umgekehrt kann ich aus der Zeit, die seit dem Aufenthalt in einem Punkte der Bahn verflossen ist, den Punkt finden, wo er sich nach Ablauf dieser Zeit befindet; kurzum es ist damit die Möglichkeit gegeben, das Problem zu lösen, für eine bestimmte Zeit den ihr entsprechenden Ort des Planeten in der Bahn zu berechnen. Es verhält sich nämlich die periodische Zeit, die bei jedem Planeten bekannt ist, zur Summe aller Entfernungen, wie die gegebene zu der Summe der Entfernungen, die zwischen 2 Punkten liegen und umgekehrt. Aber wie die Summe der Entfernungen von unendlich vielen Punkten, aus denen der Bogen und der Kreis besteht, d. h. wie die Summe der unendlich vielen Entfernungen finden? Da kam ihm der Gedanke, dass wie die Summe aller Punkte der Peripherie eben die Kreislinie und die Summe aller Punkte eines Bogens eben dieser Bogen wäre, so die Summe aller Entfernungen der Punkte auf der Peripherie die Kreisfläche und die Summe aller Entfernungen der Punkte auf einem Bogen die Fläche des Sectors zwischen den begrenzenden Punkten und der Sonne wäre. Die Zeiten verhalten sich also wie die von der Linie zwischen Sonne und Planet in diesen Zeiten beschriebenen Sectoren. Das ist das erste Keplersche Gesetz, das man gewöhnlich so ausdrückt: Die radii vectores [Kepler nennt sie

bezeichnender: radii virtutis, die Strahlen der Kraft] beschreiben den Zeiten proportionale Flächen — das Gesetz, durch welches später Newton die Centralbewegung definirte.

Wir stehen hier an einem bedeutenden Wendepunkte der Geschichte der Wissenschaft, wo der menschliche Geist sich zum ersten Mal bemüht, sich die Continuität der Natur commensurabel zu machen und wo dieses Bemühen die ersten Ahnungen von der Analysis des Unendlichen erweckt. Die Alten — und erst Kepler hat diese Anschauung überwunden — haben sich die Bewegung nur als eine gleichmässige vorzustellen vermocht. Sie haben zwar erkannt, dass die Bewegung weder gleichmässig um den Centralkörper, noch um den geometrischen Mittelpunkt der Bahn vor sich gieng, aber desshalb haben sie hierauf auch nur die Lage der Planetenbahn im Raume, die Bewegung aber auf einen andern Punkt zurückgeführt, das punctum aequans, um das sie den Planeten in gleichen Zeiten gleiche Winkel beschreiben liessen. Kepler hat zuerst die stetige Veränderung der Bewegung erfasst und mathematisch definirt durch das Gesetz, nicht dass die Körper den Zeiten proportionale Bogen und Winkel, sondern dass die Richtungslinien der Kraft den Zeiten proportionale Flächen beschreiben. Nicht die Wirkung ist den Zeiten proportional, denn sonst wäre dieselbe unabhängig von der Entfernung, in der die Kraft wirkt, sondern der Kraftaufwand, die Wirkung der Kraft ist abhängig von Zeit und Raum. Es ist jenes Gesetz die mathematische Definition einer constanten Kraft, des Grundes der stetig veränderlichen Bewegung. Man sieht, wie die Erkenntniss dieser Bewegung ohne den Begriff der Kraft nicht möglich war. Die Alten fassten die planetarische Bewegung als eine geometrische Kategorie, eine werdende Form, durch Kepler ist sie eine physikalische Kategorie geworden, die Erscheinung einer stetig wirkenden Kraft. An die Stelle von geometrischen Configurationen setzte er die Thätigkeit der Materie der Sonne, und statt durch das selbstgeschaffne Hülfsmittel eines punctum aequans und der gleichmässigen Winkelbewegung um dasselbe den Zusammenhang zwischen Zeit und Raum einer täuschenden Rechnung zu unterwerfen, drückte er denselben durch ein natur-

wahres Gesetz aus, das die Erscheinung auf ihren Grund zurückführte.

Und so bedeutend dies Resultat, so bemerkenswerth ist die Gedankenbewegung, unter der er dasselbe gefunden. Es ist klar, dass Kepler 2 Irrthümer ausgesprochen hat: 1. dass die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn sich umgekehrt verhalte wie die Entfernung des Punktes von dem Ausgangspunkte der Kraft, der Sonne, denn sie verhält sich umgekehrt wie die Entfernung der Richtung der Bewegung in jedem Punkte, d. h. wie das Perpendikel von dem Ausgangspunkte der Kraft auf die Tangente an dem betreffenden Punkte. Und 2. dass die Summe der Entfernungen aller Punkte der Flächenraum wäre, den die stetig veränderliche Linie der Entfernung bei der Bewegung beschreibt, wie die Summe aller Punkte selbst in dem beschriebenen Bogen enthalten wäre. Denn die Summe von Linien kann ebensowenig eine Fläche bilden, wie die Summe von Punkten eine Linie. Ausserdem aber hat er 3. den Beweis des Satzes, dass die Geschwindigkeiten sich umgekehrt verhalten wie die Entfernungen der Punkte von der Sonne auf die Annahme eines punctum aequans gegründet, die gerade er als einen Irrthum dargethan hat. Sollte also Kepler wirklich durch Irrthümer, die sich aufheben (8) zu einer Wahrheit gelangt sein, die mit zu den fruchtbarsten gehört, die jemals entdeckt sind? Als er gefunden, dass seine hypothesis vicaria falsch ist, und dennoch danach die heliocentrischen Längen richtig berechnet werden können, frägt er sich, ob also aus Falschem Wahres kommen könne? Bewahre, antwortet er, dass ich einen so gefährlichen Satz zugebe, sondern das Wahre folgt aus dem, was an der Hypothese wahr ist, und nur die Schwäche unserer Sinne ist Schuld daran, dass die Beobachtung die Fehler der Rechnung nicht aufdecken kann. So müssen wir auch wohl hier mit ihm antworten, dass sich nicht 2 Irrthümer zu einer Wahrheit paralysirt haben, sondern die Wahrheit in einer früheren Wahrheit, nicht in dem doppelten Irrthum der Prämissen ihren Grund hat. Und da sieht man bei dem zweiten Irrthum, den er ausspricht, dass die Summe von Punkten der Bahn die Bogen und die Summe aller Punkte die Kreislinie, sowie die

Summe von Entfernungen ein Sector und die Summe aller Entfernungen die Kreisfläche wäre, hierbei, sage ich, sieht man sogleich, dass Kepler die richtige Intuition hatte, dass die endliche Linie und endliche Fläche durch die Summe unendlich kleiner Elemente gebildet wird. Das unendliche kleine Element der Linie fällt aber für die Anschauung mit der Bezeichnung des geometrischen Punktes — und ebenso das Differential der Fläche für die Anschauung mit der Bezeichnung der geometrischen Linie zusammen. Während Kepler also die ganz richtige Anschauung der Sache besass, fehlte ihm noch der Begriff und die Definition; statt das als Linie erscheinende Flächenelement als solches d. h. als Product zweier Linien, hier des radius vector und des unendlich kleinen Bogens $=$ *rrdv* [wo *dv* das Winkelelement bedeutet] auszudrücken, und den Sector als Summe oder Integral dieser unendlich kleinen Flächen $= \int r^2 dv$, drückte er das Differential so aus, wie es sich seiner Anschauung darstellte, als Punkt und Linie.

Und ebenso ist es auch mit dem ersten Irrthume. Wenn er von dem Aufenthalt, der mora, des Planeten in einem Punkte spricht, so kann das eben nur die Zeit bedeuten, die der Planet gebraucht, um von einem Punkt zu dem andern nächsten zu gelangen, oder die Zeit, in der er einen unendlich kleinen Bogen beschreibt. Diese Zeit ist dem unendlich kleinen Flächenelement, das der radius vector beschreibt proportional [$dt = r^2 dv$], welches Gesetz Kepler wiederum so ausdrückt, wie es ihm die Anschauung an die Hand gibt, und indem er so für den unendlich kleinen Bogen Punkt und für die unendlich kleine Fläche Entfernung sagt, drückt er das richtig Angeschaute nur falsch aus, weil er es noch nicht begrifflich beherrscht, und sagt: Die Zeiten verhalten sich geradezu oder die Geschwindigkeiten in den Punkten umgekehrt wie die Entfernungen von der Sonne. Keplern, möchte ich sagen, ist es hier ergangen, wie einem Schüler, der die auf der Tafel durch geradlinige Bewegung abgelagerte Kreidemasse für eine Linie hält. Dieser sieht eine Körpermasse für eine Linie an, kann aber nichts desto weniger richtige Vorstellungen von den Eigenschaften der Linien sich bilden, obgleich ihm die mathematischen Grundbegriffe noch nicht klar sind. So hat Kepler das Differential

der Fläche als Linie geschaut und trotz dieser Unklarheit über den Grundbegriff der Theorie continuirlich veränderlicher Bewegung die specifische Eigenschaft derselben richtig erfasst. Den Begriff und die mathematische Definition des Differentials und Integrals hat er Leibnitz und Newton zu finden überlassen müssen, die erste Intuition davon wird man Keplers Genius nicht absprechen dürfen.

Was nun drittens den Beweis betrifft, so beruht derselbe allerdings auf der Hypothese eines punctum aequans und zweitens auf der Bisection der ganzen oder zusammengesetzten Excentricität, also auf Hypothesen, die er selbst zerstört. Ausserdem ist er nur für das Perihelium und Aphelium richtig, weil für diese Punkte der radius vector und das Perpendikel von der Sonne auf die Tangenten an denselben identisch sind. Und einen Fehler hat er sich allerdings zu Schulden kommen lassen, indem er diesen Beweis durch Schluss der Analogie auf alle Punkte übertrug. Aber dieser Beweis hat auch mit seiner Erkenntniss der Wahrheit nichts zu thun. Er dient ihm nur dazu, der mathematischen Methode und seinem mathematischen Gewissen Genüge zu leisten. Darum hat er das geometrische Hülfsmittel des punctum aequans und der Bisection, nachdem er die Wahrheit, die darin lag, zu einem wirklichen Naturgesetze entwickelt, auch noch dazu benutzt, um diesem Gesetze ein formelles Recht der Anerkennung zu begründen. Wie man mit Hülfe der Form eine Glocke baut und dann jene zerschlägt, um diese erstehn zu lassen, so hat er mit Hülfe des punctum aequans sein Gesetz gefunden und zu begründen versucht, und dann jenem Punkte sein trügerisches Dasein zerstört, um seine Functionen von nun an durch dieses naturwahre Gesetz ausüben zu lassen.

Die Wahrheit des Gesetzes muss sich nun durch Rechnung bestätigen.

Es sei (Fig. XXII) *acd* der eccentricus der Erde, *m* dessen Mittelpunkt, *s* die Sonne, *sma* die Linie der Apsis. Ist die Zeit gegeben, in der die Erde von *a* aus ihren Bogen bis *c* beschrieben, so würde also nach den Systemen der Früheren der $\sphericalangle$ *amc* die anomalia media sein und durch die Zeit gegeben werden; alsdann würde aus *amc* oder *cms*, dem

Radius *mc* und der Excentricität *ms* der ∢ *csa* oder die anomalia coaequata berechnet werden und damit der Ort des Planeten *c* bestimmt sein. Kepler setzt nun also an die Stelle des ∢ *amc*, um die anomalia media auszudrücken, den Inhalt der Fläche *asc*; ∢ *amc* nennt er die anomalia excentrici, die für die Früheren bei der Erdbahn mit der anomalia media zusammenfiel, da hier der Mittelpunkt der Bahn zugleich punctum aequans war; ∢ *asc* bleibt die anomalia coaequata. Die Differenz zwischen der anomalia media und excentrici nennt er die physische Gleichung, die aequatio physica, die Differenz zwischen der anomalia excentrici und coaequata die aequatio optica, die optische Gleichung. Die anomalia excentrici kann ebenso gut wie durch den Winkel *amc* auch durch den Sector *amc*, die einander proportional sind, die aequatio physica also durch den Unterschied der Fläche *asc* und des Sectors *amc*, also durch das △ *cms* gemessen werden; die aequatio optica, der ∢ *mcs*, wird zwar eigentlich nicht durch das △ *smc* gemessen, sondern durch den Sector *cmo*, der entsteht, wenn man mit dem Radius *cm* von *c* aus einen Bogen *mo* nach *cs* hin schlägt; allein da bei der Erdbahn die Excentricität sehr klein und also auch der Unterschied der Flächen *csm* und *com* = Fläche *osm* sehr klein ist, so kann man hier auch als Mass der aequatio optica das △ *cms* substituiren. Dies Dreieck misst hier also Beides, sowohl die physische als optische Gleichung. Um es zu berechnen, berechnet Kepler zuerst das rechtwinklige *sdm*, das Maximum der physischen und optischen Gleichung, da der Unterschied der Anomalieen in der Mitte zwischen den Apsides am grössten ist. Dasselbe ist $= \frac{sm \times dm}{2} =$ dem halben Product aus der Excentricität und dem Radius, und da, der Radius = 1 gesetzt, die Excentricität = 0,018 ist, so ist sein Werth $= \frac{0{,}018}{2} = 0{,}009$. Hat also die Erde eine Viertelumdrehung um den Mittelpunkt ihrer Bahn gemacht, so misst dieses Areal den Unterschied zwischen der anomalia media und excentrici (= 90 °) und den zwischen der excentrici und coaequata, man muss dasselbe nur in den propor-

tionalen Winkel verwandeln durch die Proportion 0,009 : x = die Kreisfläche π : 360 °; x also = $\frac{0{,}009}{\pi} \times 360^{\circ}$ = 1,031327 ° = 1 ° 1 ′ 52,77 ″; die coaequata ist also = 90 ° — 1 ° 1 ′ 52,77 ″ oder 53 ″ = 88 ° 58 ′ 7 ″, ein Werth, der mit dem Tychonischen übereinstimmt; die anomalia media hingegen ist bei Kepler = 90 ° + 1 ° 1 ′ 53 ″ = 91 ° 1 ′ 53 ″, während sie bei Tycho mit der anomalia excentrici zusammenfällt. Für die andern Punkte, z. B. *c*, berechnet sich das entsprechende △ so. Da dieses, *cms*, mit △ *dms* gleiche Grundlinie hat, die Excentricität *sm*, so verhalten sich die Dreiecke wie ihre Höhen: *cms* : *dms* = *cg* : *dm*, und da *cg* = sin *amc*, d. h. = dem sinus der jedesmaligen anomalia excentrici ist, *cms* : *dms* = sin *amc* : dem Radius 1; △ *cms* ist also = 0,009 × sin *amc*. Ist z. B. ∢ *amc* = 45 ° 43 ′ 46 ″, so ist △ *cms* = 0,009 × sin 45 ° 43 ′ 46 ″, und da das Areal 0,009 einem Winkel von 1 ° 1 ′ 53 ″ oder von 3713 ″ proportional ist, so ist der dem △ *cms* proportionale Winkel oder die aequatio optica und physica = 3713 ″ × sin 45 ° 43 ′ 46 ″ = 2659 ″ = 44 ′ 19 ″; und die anomalia coaequata *csa* = 45 ° 43 ′ 46 ″ — 44 ′ 19 ″ = 44 ° 59 ′ 27 ″. Nach Tycho ist für die anomalia excentrici von 45 ° 43 ′ 46 ″ die anomalia coaequata = 45 °; der Unterschied zwischen diesem und dem Keplerschen Resultat beträgt nur 33 ″, der vernachlässigt werden kann. Das Gesetz wird also durch die auf seiner Anwendung beruhende Rechnung bestätigt. —

Das zweite Gesetz.

Das Aufgeben der Kreisbahn.

Nachdem so Kepler die Ursache der zweiten Ungleichheit oder die Bewegung der Erde um die Sonne untersucht und dabei zu der Erkenntniss der stetigen Veränderung der Planetenbewegung und des Gesetzes, wodurch dieselbe der Rechnung unterworfen werden kann, gelangt war, kehrt er zur Erforschung der Marsbahn zurück und wendet dazu die bei der Untersuchung der Erdbahn gewonnenen Hülfsmittel und Resultate an. Es ist klar, dass wie im Masse der Entfernung

Eines Marsortes von der Sonne die Entfernungen verschiedener Erdörter ausgedrückt und aus diesen dann der Radius der Erdbahn gefunden worden ist (Fig. XVII), so umgekehrt jene Entfernung des Mars im Masse des Radius der Erdbahn ausgedrückt werden kann. Und wenn man so die Entfernungen dreier Oerter des Mars berechnet hat, so kann man wiederum aus diesen gerade wie bei der Erdbahn (Fig. XIX) die Excentricität und die Lage der Apsislinien des Mars berechnen. Hat man dies aber gethan und berechnet dann aus 3 anderen Entfernungen des Mars wiederum dieselben Grössen, so ergeben sich andere Werthe für dieselben. Wie nun Kepler aus der Verschiedenheit der Werthe, die sich aus verschiedenen Rechnungen für die Entfernungen des punctum aequans der Marsbahn von der Sonne ergab, den Schluss machte, dass ein derartiges punctum aequans gar nicht existirte und desshalb diese Prämisse seiner hypothesis vicaria aufgab, so schliesst er hier, dass auch die andere Prämisse, die von der Kreisfigur der Planetenbahn, fallen gelassen werden müsste; denn wäre die Bahn eine Kreislinie, so wäre sie durch 3 Punkte bestimmt, und es könnten die Resultate verschiedener Rechnungen nicht über das Mass der Beobachtungsfehler hinaus von einander abweichen. Die Erdbahn weicht nur wenig von der Kreisfigur ab, desshalb eignete sich die Untersuchung dieser nicht dazu, die Falschheit von der Prämisse der Kreisbahn zu entdecken, wohl aber ist es deren geringer Excentricität zu danken, dass sich das erste Gesetz durch seine Anwendung auf die Berechnung der anomalia coaequata aus der anomalia excentrici sogleich erprobte, obgleich die Probe unter der Voraussetzung der planetarischen Kreisbahn gemacht war; die Marsbahn war aber ihrer grossen Excentricität wegen gerade dazu geeignet, zur Aufdeckung des anderen Irrthums, der seit den Alten geherrscht, zu führen, dass nur die Kreislinie der himmlischen Körper würdig wäre. Kopernikus hatte zwar auch den Weg des Planeten, der sich schliesslich aus den verschiedenen Drehungen zusammensetzt, von der Kreislinie nach aussen ausbiegen lassen, aber das hielt er doch wohl mehr für einen Mangel seiner Mechanik, den er zugestand, als für eine Wahrheit,

mit der er ein Vorurtheil besiegte. Auch hier hat die astronomische Speculation der Alten und ihre Gebundenheit durch die Philosophie erst Kepler überwunden, indem er auch die Erforschung der Figur der Bahn und damit aller Elemente derselben auf die alleinige Grundlage der Beobachtung zurückführte.

Beweis, dass die Marsbahn eine ovale Figur hat.

Die Excentricität des Mars, d. h. also jetzt nach Aufgabe der Kreisbahn, nichts anderes als die Entfernung der Mitte der Apsislinie von der Sonne, sucht nun Kepler auf dieselbe Weise zu finden, wie er sie zur Prüfung der hypothesis vicaria berechnet hatte, d. h. aus den heliocentrischen Entfernungen des Mars in der Nähe seines Apheliums und Perihelions, die wiederum aus den Beobachtungen der entsprechenden Längen desselben, den Oertern der Erde und den Entfernungen dieser Oerter von der Sonne berechnet wurden. Das Aphelium und Perihelium konnte aber zu diesem Zweck mit hinreichender Genauigkeit aus der hypothesis vicaria entnommen werden. Nach der hypothesis vicaria fiel das Aphelium in 28° 48′ 55″ ♌, das Perihelium in 28° 48′ 55″ ♒. Die dem Aphelium zunächst liegende Beobachtung des Mars war die in 1585, den 17. Febr., 10 Uhr Abends, wo sein heliocentrischer Ort in 29° 30′ 51″ ♌, sein gäocentrischer in 15° 12′ 30″ ♌ fiel. Die Rechnung hat gelehrt, wie viel auf die Genauigkeit der Beobachtung der Oerter ankommt; man muss daher die Beobachtung so genau corrigiren wie möglich. Zu diesem Zwecke wird derselbe heliocentrische Ort des Mars aus seinen verschiedenen gäocentrischen Längen und den heliocentrischen Längen und Entfernungen verschiedene Male berechnet, die sich ergebenden Differenzen erst durch neue Rechnungen ausgeglichen und danach die heliocentrische Länge jenes Ortes genau bestimmt.

Denselben heliocentrischen Ort wie 1585, Febr. 17, St. 10 A. nimmt also der Mars wieder ein

1587. Januar 5. St. 9. 31′ A.
1588. Nvbr. 22. St. 9. $2\frac{1}{2}$′ A.

1590. Octb. 10. St. 8. $35\frac{1}{2}'$ A.
1600. März 6. St. 6. $17\frac{1}{2}'$ A.

Beobachtet war aber der Mars:

1585. Febr.	17.	St.	10	A.	in	15° 12′ 30″	♌
1587. Jan.	1.	St.	7	8′ M.	in	1° 4′ 36″	♎
1588. Nvbr.	10.	St.	6	30′ M.	in	25° 31′ 0″	♍
1590. Octbr.	6.	St.	4	45′ M.	in	17° 20′ 0″	♍
1600. März	6.	St.	8	30′ A.	in	29° 18′ 0″	♋

Die 4 letzteren Beobachtungen müssen also auf die periodischen Momente zurückgeführt werden. Z. B. 1590, Octbr. 6, 4 U. 45′ M. erschien der Mars in 17° 20′ ♍; die tägliche scheinbare Bewegung betrug zu jener Zeit 37′ in consequentiam signorum, also beschreibt er vom 6. Octbr. 4 U. 45′ M. bis zum periodischen Momente Octbr. 10, 8 U. 35′ A. (d. h. in $4\frac{2}{3}$ Tag) einen scheinbaren Bogen von 2° 52′ 40″; in dem periodischen Momente würde er also in 17° 20′ ♍ + 2° 52′ 40″, in 20° 12′ 40″ ♍ erscheinen; Kepler setzt seinen gäocentrischen Ort in 20° 13′ 30″ ♍. Da nun für diese Momente die heliocentrischen Oerter der Erde aus den Tychonischen progymnasmata und die Entfernungen der Erde von der Sonne aus Keplers eignem aus der Excentricität der Erdbahn = 1800 berechneten Verzeichnisse der Erdentfernungen genommen werden können, so lässt sich folgende Tabelle aufstellen:

Zeit.	gäocentrisch. Ort des Mars.	Ort der Sonne od. Erde.	Entfernung der Erde.
1585 u. s. w.	15° 12′ 30″ ♌	9° 22′ 37 ♓ od. ♍	99170 ($\alpha\delta$)
1587 „	2° 8′ 30″ ♎	25° 21′ 16 ♑ od. ♋	98300 ($\alpha\varepsilon$)
1588 „	2° 35′ 40″ ♎	10° 55′ 8 ♐ od. ♊	98355 ($\alpha\varkappa$)
1590 „	20° 13′ 30″ ♍	26° 58′ 46 ♎ od. ♈	99300 ($\alpha\lambda$)
1600 „	29° 18′ 30″ ♋	26° 31′ 36 ♓ od. ♍	99667 ($\alpha\gamma$)

In Fig. XXIII, wo π den heliocentrischen Ort des Mars, α die Sonne, δ, ε, $\varkappa$, λ, γ die den Zeitmomenten von 1585, 87, 88, 90 und 1600 entsprechenden Oerter der Erde bezeichnen, sind also folgende Grössen bekannt:

1. Die Winkel $\alpha\delta\pi$ (155° 49′ 53″): $\alpha\varepsilon\pi$ (113° 12′ 46″); $\alpha\varkappa\pi$ (68° 19′ 28″); $\alpha\lambda\pi$ (36° 45′ 16″); $\alpha\gamma\pi$ (122° 46′ 54″).

2. Die Linien $\alpha\delta$, $\alpha\varepsilon$, $\alpha\varkappa$, $\alpha\lambda$, $\alpha\gamma$.

3. kann man für $\alpha\pi$ einen bestimmten Werth aus dem $\measuredangle$ $\alpha\delta\pi$ und (da π schon ein bestimmter heliocentrischer Ort gegeben ist) aus $\measuredangle$ $\delta\pi\alpha$ und der Linie $\alpha\delta$ berechnen; es ist $\alpha\pi = \alpha\delta \times \frac{\sin \alpha\delta\pi}{\sin \alpha\pi\delta} = 99170 \times \frac{\sin\ 155^0\ 49'\ 53''}{\sin\ \ 14^0\ 18'\ 21''}$ = 164317; aus $\alpha\pi$, den entsprechenden Winkeln und radii vectores der Erde kann man nun die Winkel $\alpha\pi\varepsilon$, $\alpha\pi\varkappa$ u. s w. berechnen, d. h. also den heliocentrischen Ort von $\alpha\pi$ für diese verschiedenen gäocentrischen Längen; sind die Resultate identisch, so dass $\alpha\pi$ immer an denselben Ort fällt, so ist die Länge von $\alpha\pi$ richtig angenommen, sonst muss sie so lange gerückt werden, bis die Resultate übereinstimmen. Legt man $\alpha\pi$ in 29° 20′ 12″ ♌ und nimmt es = 166700, so ist die Uebereinstimmung hinlänglich genau. Das ist die Entfernung des ekliptischen Ortes des Mars von der Sonne; der Ort seiner Bahn ist = 166780 entfernt; ebenso wird die Entfernung des Mars ($\alpha\pi'$ in 29° 54′ 53″ am 1. Novbr. 1589, A. 6 U. 10′) nahe bei seinem Perihelium auf 138500 berechnet. Danach ergibt sich der Radius der Marsbahn (oder richtiger die Hälfte der Apsislinie) nahezu = $\frac{166780 + 138500}{2}$ = 152640 und die Excentricität = $\frac{166780 - 138500}{2}$ = 14140 im Masse des Radius der Erdbahn = 100000; im Masse des Radius der Marsbahn = 100000 ist sie = $\frac{100000}{152640} \times 14140 = 9264$. Die Hälfte der zusammengesetzten Excentricität nach Tycho war 9282; der Unterschied 18, der vernachlässigt werden kann. Die Bisection der Marsbahn bestätigt sich also aufs Neue.

Die genaue Lage der Apsis oder der Ort des Apheliums und Periheliums bestimmt sich aus den vorher beschriebenen Beobachtungen folgendermassen:

$\alpha\pi$ war 1588, den 22. Novbr. 9 Uhr $2^1/_2{}'$
Abends in . . . . . 29° 20′ 12″ ♌
$\alpha\pi'$ 1589, den 1. November 6 Uhr 10′
Abends in . . . . . 29° 54′ 53″ ♒
Die verflossene Zeit ist 343 Tage 21 St.
$52^1/_2$ M., der beschriebene Bogen = 180° 34′ 41″
oder mit Abzug der Präcession = 180° 33′ 53″

Die Hälfte der periodischen Zeit (686 Tage 23 St. 32′) beträgt 343 Tage 11 St. 46′, der Bogen zwischen Aphelium und Perihelium = 180°.

Wäre zwischen den beiden Beobachtungen gerade die Hälfte der periodischen Zeit verflossen und hätte der Planet in dieser Zeit gerade 180° beschrieben, so wäre die Beobachtung von 1588 u. s. w. die des Apheliums und die von 1589 u. s. w. die des Periheliums gewesen. Die Zwischenzeit beträgt aber 21 St. $52^1/_2{}'$ — 11 St. 46′, also 10 St. $6^1/_2{}'$, und der beschriebene Bogen 33′ 53″ mehr. Es ist also entweder jene Beobachtung nicht die des Apheliums oder diese nicht die des Periheliums, oder beide treffen nicht zu. Nehmen wir zunächst an, jene Beobachtung sei die des Apheliums, diese aber nicht die des Periheliums, dann würde also der Planet in dem Ueberschuss der Zeit über die Hälfte der periodischen Zeit — 10 St. $6^1/_2{}'$ — den Ueberschuss des beschriebenen Bogens über die 180° = 33′ 53″ nach seiner Ankunft im Perihelium beschrieben haben. Beschreibt aber der Planet in der unmittelbaren Nähe des Periheliums 33′ 53″ in 10 St. $6^1/_2{}'$? Die tägliche physische Bewegung des Planeten in jeder Entfernung findet man so: Da sich die von dem radius vector beschriebenen Flächen wie die Zeiten (t u. t') verhalten, die Flächen aber, wenn sie klein genug genommen werden (und 1 Tag ist gegen die ganze periodische Zeit klein genug dazu), als Kreissectoren angesehen werden können, also wenn r und r' die Entfernungen und v und v' die täglichen Bogen bezeichnen, der Inhalt des Sectors durch $r^2 v$ oder $r'^2 v'$ ausgedrückt werden kann, so gilt die Proportion $t : t' = r^2 v : r'^2 v'$; oder wenn t und $t' = 1$ Tag genommen werden: $r^2 : r'^2 = v' : v$. Die täglichen Bogen v' und v verhalten sich also umgekehrt wie

die Quadrate der entsprechenden Entfernungen. Nimmt man nun als Mass der täglichen Bogen den bei der mittleren Bewegung beschriebenen, der = 360°, dividirt durch die periodische Zeit, oder = 31′ 12″ ist, und als Mass der Entfernungen die mittlere Entfernung = 152640, in der er diesen mittleren Bogen als täglichen zurücklegt, so verhält sich der tägliche Bogen des Periheliums zu dem mittleren Bogen = $152640^2 : 138500^2$; also ist jener = $\frac{152640^2}{138500^2} \times 31' 12''$ = 38′ 2″ nahezu; ebenso der tägliche Bogen des Apheliums = $\frac{152640^2}{166780^2} \times 31' 12'' = 26' 13''$ nahezu.

Der Mars beschreibt hiernach vom Perihelium aus in 10 St. $6\frac{1}{2}'$ keine 33′ 53″; die Annahme ist also nicht richtig. Auf dieselbe Weise wird auch die Annahme widerlegt, dass die Beobachtung vom 1. Novbr. 1589 die des Periheliums wäre, und der Planet vor seiner Ankunft im Aphelium in den 10 St. $6\frac{1}{2}'$ die 33′ 53″ zurückgelegt hätte; denn hier beschreibt er in einem ganzen Tage nur 26′ 13″; die Apsides liegen also nur in der Nähe jener beobachteten Oerter, nicht in diesen selbst. Wie sie finden? Vertheilen wir zunächst den Ueberschuss der Zeit zur Hälfte auf die Bewegung vor dem Aphelium, zur Hälfte auf die nach dem Perihelium, so beschreibt er in dieser Zeit = 5 St. $3\frac{1}{4}$ M. dort 5′ 16″, hier 8′ 1″; dadurch werden 13′ 17″ untergebracht. Wären nun noch gerade 180° übrig, so würde man mit Recht annehmen, dass er am 22. Nvbr. 1588 5′ 16″ vor dem Aphelium gewesen sei, also das Aphelium selbst in 29° 20′ 12″ + 5′ 16″, in 29° 25′ 28″, sich befinde. Da der Planet aber in der noch übrigen halben periodischen Zeit 20′ 36″ (33′ 53″ — 13′ 17″) mehr durchläuft als 180°, so fragt es sich, in welchem Theile seiner Bahn er diese grössere Schnelligkeit hat entwickeln können. Nimmt man an, der Planet habe sich am 22. Novbr. 1588 einen Tag, also 26′ 13″ über das Aphelium hinaus befunden, so würde er in der Hälfte der periodischen Zeit einen Tag oder 38′ 2″ über das Perigäum hinaus sich bewegt haben, also 38′ 2″ — 26′ 13″ = 11′ 49″ mehr beschrieben haben als wenn er sich gerade

vom Aphelium bis zum Perihelium bewegt hätte. Wenn sich also der Planet nur 11′ 49″ in der halben Umdrehungszeit rascher bewegt hätte, so würde man annehmen können, der Planet hätte sich am 22. Novbr. 1588 26′ 13″ nach dem Aphelium befunden, aber er ist 20′ 36″ schneller gegangen, wie viel muss er nun zu jener Zeit schon über das Aphelium hinaus gewesen sein? 11′ 40″ : 26′ 13″ = 20′ 36″ : x; x = 45′ 42″, der Planet muss also 45′ 42″ über das Aphelium hinaus gewesen sein. Es sind also mit dem heliocentrischen Orte 29° 20′ 12″ ♌ 2 Correcturen vorzunehmen, um zum wahren Aphelium zu gelangen. Einmal musste wegen der Vertheilung des Zeitüberschusses das Aphelium um 5′ 16″ in 29° 25′ 28″ vorgerückt werden, das andere Mal wegen des noch übrigen Ueberschusses an Schnelligkeit um 45′ 42″ von da zurückverlegt werden; also ist dasselbe in 29° 20′ 12″ ♌ + 5′ 16″ — 45′ 42″ = 28° 39′ 46″ ♌ und das Perihelium in 28° 39′ 46″ ♒ zu versetzen.

Für den Mars ist also die Bisection der ganzen Excentricität ebenso bewiesen wie für die Erde. Man wird also bei seiner Bahn auch ebenso wie bei der Erdbahn die Anomalieen nach dem Gesetz von der Proportionalität der Zeiten und Flächen, die der radius vector beschreibt, berechnen können. Es sei (Fig. XXIV) s die Sonne, m die Mitte der Apsislinie, a das punctum aequans der Früheren, α das Aphelium, cm senkrecht auf $s\alpha$. Alsdann ist nach den Alten αac die mittlere Anomalie für die excentrische Anomalie αmc = 90°, (die anom. excentrici) und αsc die entsprechende anomalia coaequata. Nach Keplers Gesetz misst aber die Fläche αsc die mittlere Anomalie oder die Zeit für die anomalia excentrici = 90°. Die aequatio physica oder die anomalia media minus der anomalia excentrici misst das Dreieck cms, in den proportionalen Winkel verwandelt; die aequatio optica oder die anomalia excentrici minus der anomalia coaequata ist der Winkel mcs. Das Dreieck mcs ist nun = $\frac{mc \times ms}{2}$ = $\frac{100000 \times 9264}{2}$ = 463200000. Der dieser Fläche propor-

tionale Winkel ist $= \frac{463200000}{3141592600} \times 360^0$ nach dem Ausdrucke der neueren $= \frac{0{,}06294}{2\,\pi} \times 360^0 = 19108'' = 5^0$ 18′ 28″; das ist also der Unterschied der anomalia media und excentrici; da die letztere $= 90^0$ angenommen, ist die media $= 95^0$ 18′ 28″. Nach der Configuration der Alten würde das also der Winkel *αac* sein. Die aequatio optica aber oder der Winkel *mcs* wird offenbar durch seine Tangente gefunden, die $= \frac{ms}{mc} = \frac{9264}{100000}$; der Winkel ergibt sich daraus $= 5^0$ 17′ 34″. Das ist also der Unterschied zwischen der anomalia excentrici und coaequata, oder die coaequata, der Winkel *αsc*, ist $= 90^0 - 5^0$ 17′ 34″ $= 84^0$ 42′ 26″.

Es entsprechen sich also folgende Werthe:

anomalia media $= 95^0$ 18′ 28″
„ excentrici $= 90^0$
„ coaequata $= 84^0$ 42′ 26″.

Nach der hypothesis vicaria, wo also *sm* : *ma* sich verhielt $= 11332 : 7232$ ergibt sich für dieselbe anomalia media die coaequata $= 84^0$ 42′ 2″; also nur eine Differenz von 24″.

Für die anomalia excentrici $= 45^0$ ergeben sich folgende Werthe der anderen Anomalieen. Es sei *αmb* $= 45^0$. Es misst also die Fläche *αsb* die mittlere Anomalie, und der Sector *αmb* (der ja dem Winkel *αmb* proportional ist) die excentrische Anomalie. Die aequatio physica ist also $= \triangle$ *mbs*. Dasselbe verhält sich zu $\triangle$ *cms*, mit dem es die Grundlinie *ms* gemein hat, wie seine Höhe *bg* : *mc*. *bg* ist aber $=$ sinus $\sphericalangle$ *αmb* $=$ sin 45^0, wie *mc* $=$ sin 90^0. Statt des Verhältnisses $\triangle$ *bms* : $\triangle$ *cms* können wir sogleich das Verhältniss der proportionalen Winkel einsetzen; also der Winkel, den Dreieck *bms* repräsentirt $(x) : 19108'' =$ sin 45^0 : sin 90^0; $x = 19108'' \times$ sin $45^0 = 13512'' = 3^0$ 45′ 12″. Die anomalia media ist also $= 45^0 + 3^0$ 45′ 12″ $= 48^0$ 45′ 12″. Die aequatio optica ist $=$ Winkel *mbs*. Nach der Configuration des punctum aequans ist Winkel *abm* $= 3^0$ 45′ 12″; Winkel *bms* $= 180^0 -$ *bma* und daraus, dem

Radius *bm* und der Excentricität *ms* berechnet sich *mbs* = 3° 31′ 6″; die anomalia coaequata also = 45° — 3° 31′ 6″ = 41° 28′ 54″. Aus der hypothesis vicaria ergibt sich für dieselbe anomalia media = 48° 45′ 12″ die coaequata = 41° 20′ 33″. Die Differenz also 8′ 21″.

Bei der anomalia excentrici = 135° ergibt sich nach der Rechnung aus dem Keplerschen Gesetze die coaequata = 130° 59′ 25″; während sie nach der hypothesis vicaria sich auf 131° 7′ 26″ berechnet, die Differenz also = 8′ 1″

Nach der hypothesis vicaria, die als hinlänglich sichere Controle der heliocentrischen Längen dienen kann, würde also der Planet zwischen 45° und 135° excentrischer Anomalie um die Sonne einen Winkel von 131° 7′ 26″ — 41° 20′ 33″ = 89° 46′ 53″ beschreiben; nach der Berechnung aus den Flächen aber, die der radius vector beschreibt, einen Winkel von 130° 59′ 25″ — 41° 28′ 54″ = 89° 30′ 31″; einen Winkel also, der um 16′ 22″ zu klein ist. Die letztere Rechnung gibt also die Geschwindigkeit in den mittleren Längen zwischen 45° und 135° zu klein oder die Zeit, in der der Mars diese Längen durchläuft, zu gross an; da aber die Zeiten durch die Flächen des radius vector gemessen und diese wiederum durch die wechselnden Grössen des radius vector selbst bestimmt werden, so müssen die Flächen und damit die Werthe des radius vector oder die Entfernungen der Oerter von der Sonne zu gross angenommen worden sein. Dieser Schluss wird auch durch die Messung der Entfernungen selbst bestätigt. Es sind im Laufe der Untersuchung verschiedene Entfernungen des Mars von der Sonne aus der jedesmaligen heliocentrischen und gäocentrischen Länge und der entsprechenden Entfernung des Erdortes von der Sonne berechnet worden. So war (Fig. XXV) der Mars in

14° 16′ 52″ ♉ (1ˢ) = 147750 ($\alpha\vartheta$)
5° 24′ 21″ ♌ (6ˢ) = 163100 ($\alpha\eta$)
8° 19′ 4″ ♍ (5ˢ) = 166255 ($\alpha\varkappa$).

Berechnet man nun die Entfernungen des Mars in denselben Oertern aus der hypothetischen Kreisbahn, z. B. $\alpha\varkappa$ aus dem Winkel $\varkappa\alpha\gamma$, der aus der Richtung des Apheliums $\alpha\gamma\varepsilon$ und der Richtung von $\alpha\varkappa$ bekannt ist, dem Radius $\gamma\varkappa$

= 152640 (oder auch der aequatio optica $\alpha\varkappa\gamma$) und der Excentricität = 14140 und ebenso die andern Linien, so ergibt sich

	Die obigen Werthe waren	Differenz
$\alpha\vartheta$ = 148539	147750	789
$\alpha\eta$ = 163883	163100	783
$\alpha\varkappa$ = 166605	166255	350

Da nun das Aphelium in 28 ° ☊ (4 ˢ) fällt, so ist von diesen Oertern den mittleren Längen (90 ° oder 270 °) am nächsten

$\alpha\vartheta$ in ♉ (1 ˢ); dann folgt
$\alpha\eta$ in ♌ (6 ˢ); dann
$\alpha\varkappa$ in ♍ (5 ˢ).

Der Unterschied der Werthe ist bei $\alpha\vartheta$ am grössten, dann bei $\alpha\eta$, dann bei $\alpha\varkappa$; die Entfernungen werden vom Aphelium nach den mittleren Längen zu immer kleiner im Verhältniss zu den Entfernungen derselben heliocentrischen Oerter auf der Peripherie des vorausgesetzten Kreises. Der Planet beschreibt also keinen Kreis um die Mitte der Apsislinie, sondern eine Figur, deren Punkte vom Aphelium nach den mittleren Längen zu der Mitte der Apsislinie immer näher rücken, d. h. er beschreibt eine ovale Figur.

Die Ooide (die Eilinie).

So hatte Kepler auch das zweite philosophische Vorurtheil, das seit den Alten geherrscht hatte, die Kreisbahn der Planeten, durch Induction widerlegt, wie er an die Stelle der der. Zeit proportionalen Winkelbewegung des Planeten um das punctum aequans die Beschreibung der der Zeit proportionalen Flächen durch den radius vector gesetzt hatte. Welche ovale Figur war nun an die Stelle des Kreises zu setzen? Welches war deren geometrische Definition? Um diese zu finden, sucht sich Kepler ihre Entstehung klar zu machen. Schon sogleich, nachdem er gezeigt, dass die Kraft der planetarischen Bewegung in der Sonne liege und ihre Wirkung im Verhältniss zur Entfernung des beeinflussten Körpers abnähme, hatte er die Frage aufgeworfen, wesshalb

der Körper nun nicht immer in derselben Entfernung von der Sonne bliebe und die Bewegung nicht um die Sonne als Centrum gleichmässig vor sich ginge, sondern vielmehr der Kreis in Beziehung auf die Sonne ein excentrischer und desshalb die Entfernungen der Oerter des Planeten von der Sonne immer verschieden wären? Kepler antwortet zunächst darauf, dass die Ursache der Excentricität nicht in der Sonne liegen kann, sondern in einer dem Planeten eigenthümlichen Kraft, die diesem noch eine selbstständige Bewegung ertheilte. Um die durch das Zusammenwirken der beiden Kräfte verursachte Curve anschaulich zu machen, benutzt er den hierzu sehr tauglichen Epicycel als Hülfsmittel. Und da lässt sich die Erzeugung der Curve auf zweierlei Art vorstellen:

1. Es sei (Fig. XXVI[a]) A die Sonne, OO' der circulus eccentricus des Planeten mit dem Mittelpunkt M; $O'AMO$ sei die Apsislinie. Der Planet sei von O nach B, C, O' gegangen, dann lassen sich die erreichten Entfernungen AO, AB, AC, AO' auch auf folgende Weise darstellen. Es sei α die Sonne, $\alpha\mu$ = dem Radius des eccentricus $[MO]$ und um μ beschreibe man mit der Excentricität AM als Radius einen Epicycel; macht man dann die Bogen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma o'$ ähnlich den Bogen OB, BC, CO' so sind die Entfernungen αo, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha o' = AO$, AB, AC, AO'. Schlägt man nun mit $\alpha\beta$ den Bogen $\beta\iota\zeta$, mit $\alpha\gamma$ den Bogen $\gamma\eta\varepsilon$, so kann man sich vorstellen, dass während der Planet durch die Kraft der Sonne den Winkel OAB macht und er durch diese Kraft allein den Bogen OO'' beschriebe, der Planet durch eine andere beondere Kraft auf dem Durchmesser des Epicycels oo' um das Stück $o\iota = O''B$ sich der Sonne genähert habe, ebenso während der Bewegung von B nach C, um das Stück $\iota\eta = B'C$ u. s. w., dass der Planet überhaupt durch eine Libration zwischen oo' sich der Sonne vom Aphelium bis zum Perihelium nähere, um sich ebenso von da wieder bis zum Aphelium von ihr zu entfernen. So könnte man sich die Erzeugung eines excentrischen Kreises denken. Wie aber nun die Erzeugung einer ovalen Figur? Auf diese Frage gibt Kepler erst später Antwort. Zunächst verwirft er diese Librationstheorie, weil die Libration eine unregelmässige sein würde — denn die Zwi-

schenräume $o\iota$, $\iota\eta$, $\eta o'$ sind den Bogen $o\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma o'$ nicht proportional — und nimmt eine andere Erklärung an.

2. Es sei (Fig. XXVI^{b}) α die Sonne, p der Mittelpunkt eines Epicycels, dessen Radius $p\beta$. Wäre nun der Planet in p und folgte er der Kraft der Sonne allein, so würde er um α als Mittelpunkt einen concentrischen Kreis beschreiben, dessen Radius $= \alpha p$. Der Planet befinde sich aber in β und bewege sich durch eine andere Kraft zugleich auf dem Epicycel um dessen Mittelpunkt in einer der ersteren Bewegung entgegengesetzten Richtung. Hat nun der Planet um p dieselbe Winkelgeschwindigkeit wie p um α, d. h. sind die in gleicher Zeit beiderseitig beschriebenen Bogen einander ähnlich und bewegt sich die Verbindungslinie zwischen dem Mittelpunkt des Epicycels und dem Planeten parallel zu sich, so ist der Zug, der die wirklichen Oerter des Planeten verbindet, eine zur Sonne excentrische Kreislinie, und die Excentricität dieser Bahn, d. h. die Entfernung des Mittelpunktes dieser Kreislinie von der Sonne $\alpha\mu$ = dem Radius des Epicycels. Ist also αp nach $\alpha\nu$, oder $\alpha\beta$ nach $\alpha\gamma$ gegangen und hat in derselben Zeit der Planet den Winkel $\gamma\nu\delta = \gamma\alpha\beta$ zurückgelegt, so dass $\nu\delta \parallel \alpha\beta$, so ist der Zug $\beta\delta$ ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt μ von $\alpha = \beta p$ oder $\gamma\nu$ entfernt ist. Nun stellt sich aber heraus, dass die Curve keine Kreislinie ist, sondern dass die Entfernungen der wirklichen Oerter des Planeten von der Sonne kleiner sind als sie wären, wenn sie auf jener Kreislinie lägen. Der Winkel des Planeten um den Mittelpunkt seines Epicycels ist also nicht dem Winkel des Mittelpunktes um α gleich, sondern wenn $\alpha\beta$ nach $\alpha\gamma$ gegangen ist, so hat sich der Planet um einen grössern Bogen als $= \gamma\delta$ von γ entfernt, um den Bogen $\gamma\delta'$, so dass sich der Planet α mehr genähert hat und die Entfernung $\alpha\delta' < \alpha\delta$ ist. Die Bewegung auf dem Epicycel kommt hiernach der Bewegung des Kraftstrahles von der Sonne zuvor, und indem der Planet zwar alle Entfernungen durchmisst, die er bei gleicher Winkelgeschwindigkeit der beiden Bewegungen durchmessen würde und sein zwischen zwei Entfernungen beschriebener Bogen also alle Entfernungen begrenzt, die auch der entsprechende Kreisbogen zwischen den beiden Entfernungen begrenzen würde,

so erreicht er doch bei der ovalen Figur jede Entfernung näher am Aphelium, als er dieselbe erreichen würde, wenn er eine Kreislinie beschriebe. Hiernach kann also höchstens eine von den Bewegungen eine gleichmässige sein und den Zeiten proportionale Winkel oder Bogen beschreiben. Es ist am einfachsten, die gleichmässige Geschwindigkeit der Bewegung des Planeten auf dem Epicycel zuzuschreiben, die Winkelgeschwindigkeit des Kraftstrahls aber mit der jedesmaligen Entfernung sich ändern zu lassen. So richtig die Methode ist, die Curve durch eine doppelte Bewegung erzeugt werden zu lassen, so sieht man doch, in welchen Widerspruch Kepler durch die Unklarheit der entstehenden Begriffe über die Kategorien des Unendlichkleinen gerathen ist. Da er früher die Fläche, die der radius vector beschreibt, als die Summe der stets wechselnden Entfernungen dargestellt hatte, so müssten danach doch die beiden Flächen, welche durch die Entfernungen $\alpha\beta$ und $\alpha\delta'$ auf dem Kreise und der ovalen Figur begrenzt werden oder die Flächen $\beta\alpha\delta'$, und $\beta\alpha\gamma$ [Fig. XXVII], wo $\alpha\gamma = \alpha\delta'$, weil sie doch dieselbe Summe von Entfernungen in sich enthalten sollen, einander gleich an Inhalt sein. Man sieht, wie er dort unbewusst der Entfernung oder dem radius vector eine unendlich kleine Breitenausdehnung zuertheilt oder denselben für das Differential der Fläche ansieht, und hier diese Ausdehnung ihm wieder nimmt und ihn als rein geometrische Linie betrachtet.

Aber auch abgesehen von diesem Irrthum, lässt sich der Ort des Planeten für eine gegebene Zeit, der durch die Entfernung oder den radius vector desselben von der Sonne und den Winkel, den derselbe mit der Apsislinie macht, bestimmt wird, nach dieser Theorie nicht angeben, so lange das Verhältniss der gleichmässigen Geschwindigkeit des Epicycels zu der ungleichmässigen des radius vector nicht bekannt ist oder um welchen Bogen jedesmal der Planet bei der ovalen Bahn die Entfernung näher am Aphelium erreicht, die er bei gleichmässiger Winkelbewegung auf der Peripherie eines Kreises in bekannter Zeit erreichen würde. Es war also die Frage [Fig. XXVII], wie sich der Winkel $\beta\alpha\delta'$ zu dem Winkel $\beta\alpha\gamma$ verhielte, wo $\alpha\gamma = \alpha\delta'$. Da erinnerte sich Kepler, wie

seine hypothesis vicaria die heliocentrischen Längen oder die Winkel um α für die gegebenen Zeiten genau genug anzeigte, und wenn also der fingirte Kreis für dieselben Zeiten jedesmal die Entfernung des Planeten von der Sonne angab, so liess sich aus diesen beiden Momenten der Ort des Planeten in seiner Bahn immer finden. Es sei also (Fig. XXVIII) s die Sonne, μ der Mittelpunkt, a das punctum aequans der nach der hypothesis vicaria construirten Bahn des Mars, so dass also $s\mu : \mu a =$ 11332: 7232 im Masse des Radius $\mu p = 100000$. Daraus sei nun für die gegebene Zeit, die durch den Winkel pad gemessen wird, die anomalia coaequata psd berechnet, so ist diese der richtige Winkel, den der radius vector sp in dieser Zeit beschrieben. Aber die eben daraus berechnete Entfernung sd ist zu gross. Die richtige Entfernung muss man durch jenen Hülfs- oder fingirten Kreis finden. Bei diesem wird also die Zeit durch die gleichmässige Bewegung des Planeten um den Mittelpunkt des Epicycels oder was dasselbe ist, durch eine fingirte gleichmässige Bewegung des Radius um den Mittelpunkt des eccentrischen Kreises, dessen einfache Excentricität durch die Bisection jener zusammengesetzten gefunden ist, gemessen. Man verlege also den Mittelpunkt in die Mitte zwischen s und a nach μ', schlage mit μp von μ' aus einen Kreis oo' und übertrage nun die anomalia media pad nach μ' d. h. man ziehe zu $ad \parallel$ den Radius $\mu'\delta'$; verbindet man alsdann δ' mit s, so ist $s\delta'$ die Entfernung, die der Planet unter der Voraussetzung gleicher Winkelgeschwindigkeit der beiden erzeugenden Bewegungen bei der anomalia coaequata $= ps\delta'$ erreichen würde, die er aber nun in Wirklichkeit schon bei der anomalia coaequata psd erreicht. Schlägt man also mit $\delta' s$ von s aus einen Kreis, so ist der Schneidungspunkt dieses Kreises mit ds, d. i. d', der durch den richtigen Winkel und die richtige Entfernung bestimmte Ort des Planeten für die gegebene Zeit.

Welche Gestalt würde nun die Curve haben, die alle die auf diese Weise bestimmten Punkte verbindet? Um diese Frage zu beantworten, ist es nöthig zu wissen, unter welcher Anomalie der Planet die mittlere Entfernung von der Sonne, d. h. die Entfernung, die gleich der halben Apsislinie oder

dem Radius des Hülfskreises gleich ist, erreichen würde. Es sei (Fig. XXIX) m der Mittelpunkt des Hülfskreises; auf diesem würde der Planet die mittlere Entfernung von der Sonne s in dem Punkte erreichen, in welchem das Perpendikel, in der Mitte $[h]$ der Excentricität sm errichtet, den Kreis trifft, in δ. Denn alsdann ist $s\delta$ wegen der Construction $= m\delta =$ dem Radius. Die anomalia coaequata für diesen Punkt, $\sphericalangle\, \delta sm$, ist der Winkel, dessen *cosinus* $= \frac{hs}{s\delta} =$ der Hälfte der Excentricität, dividirt durch den Radius, oder [nimmt man den Radius $= 1$] $= \frac{0{,}09264}{2} = 0{,}04632$; $\sphericalangle\, \delta sm = 87^0\ 20'\ 40''$; die entsprechende anomalia media δmp ist $=$ dem Supplement zu δms oder δsm, also $= 92^0\ 39'\ 20''$. Auf der ovalen Curve nun erreicht der Planet diese Entfernung in dem durch folgende Construction gefundenen Punkte. Ich nehme den Punkt a so, dass $ma = sm$ und m' so, dass $sm' : m'a = 11332 : 7232$, schlage von m' aus einen neuen Kreis mit dem Radius des Hülfskreises mp [das ist die Bahn der hypothesis vicaria], ziehe von a, dem punctum aequans, zu $m\delta$ parallel ad bis an die Peripherie des letzteren Kreises, verbinde d mit s und schlage dann mit der Entfernung $s\delta$ einen Kreisbogen von s aus; wo dieser die Linie sd schneidet, in d' würde der Ort des Planeten sein, der die mittlere Entfernung von der Sonne hat. Die anomalia media dieses Orts dap ist natürlich $= \delta mp = 92^0\ 39'\ 20''$, der Winkel $dam' = 87^0\ 20'\ 40''$; $\sphericalangle\, adm'$ ist $= 4^0\ 8'\ 4''$ [$sin\ adm' = sin\ dam' \times \frac{am'}{m'd} =$ $sin\ 87^0\ 20'\ 40'' \times 0{,}07232$;] $\sphericalangle\, dm'a = 88^0\ 31'\ 16''$.

Die coaequata $\sphericalangle\, dsm'$ wird nach dem Tangentensatz gefunden:

$$tg \sphericalangle \frac{dsm' + sdm'}{2} : tg \frac{dsm' - sdm'}{2} = m'd + m's : m'd - m's; \frac{dsm' + sdm'}{2} = \frac{dm'a}{2} = 44^0\ 15'\ 38''; \quad m'd + m's = 1,\ 11332; \quad m'd - m's = 0{,}88668. \quad \frac{dsm' - sdm'}{2}$$

daraus $= 37^0\ 40'\ 56'' \sphericalangle\, dsm' = 44^0\ 15'\ 38'' + 37^0\ 40'$

$56'' = 81^0\ 56'\ 34''$. Die anomalia excentrici $\sphericalangle\ d'mp$ wird ebenfalls nach dem Tangentensatz aus der anomalia coaequata $= 81^0\ 56'\ 34''$ und den Seiten $d's = 1$ und $sm = 0{,}09264$ auf $85^0\ 57'$ berechnet. Die Entfernung des Ortes d' vom Mittelpunkt m, $d'm$, berechnet sich auf 0,99261. Nach Keplers — irrthümlichem — Raisonnement würden also auf dem Hülfskreise die Entfernungen von der grössten — im Aphelium — bis zur mittleren — dem Radius oder der Hälfte der Achse — innerhalb einer Fläche liegen, die durch den radius vector bei einer Drehung von $87^0\ 20'$ beschrieben würde; die Entfernungen von der mittleren bis zur kleinsten im Perihelium innerhalb einer Fläche, die der radius vector bei einer Drehung von $92^0\ 40'$ beschriebe. Auf der ovalen Curve wird aber die Summe jener Entfernungen von der grössten bis zur mittlern durch eine Winkelbewegung $= 81^0\ 56'$, die Summe der kleineren, von der mittleren bis zur kleinsten, durch eine solche $= 98^0\ 4'$ beschrieben; in jenem oberen Raume drängen sich die Entfernungen daher zusammen und sind dichter, in diesem untern ziehen sie sich auseinander und sind dünner; dort wird der verbindende Zug der Curve krummer, hier flacher sein. Die Curve wird desshalb die Gestalt einer Ooide oder des Längendurchschnitts eines Eis haben, dessen spitzeres Ende das Aphelium, dessen breiteres das Perihelium bezeichnet.

Berechnung der Ooide.

Sollen nun die Anomalien dieser Bahn auf wissenschaftliche Weise, d. h. nicht mit Hinzuziehung der stellvertretenden Hypothese, sondern aus dem Naturgesetze von der Proportionalität der Zeiten und der Flächen, die der radius vector beschreibt, bestimmt werden, so erfordert das die Lösung zweier Probleme.

1. Um die der periodischen Zeit oder der ganzen Drehung $= 360^0$ entsprechende Fläche zu kennen, muss ich den Inhalt der Ooide berechnen oder die Curve quadriren können. Zu diesem Zwecke betrachtet sie Kepler als eine Ellipse, deren grosse Achse eben die Linie der Apsis und deren halbe kleine die Verbindungslinie zwischen der Mitte der Apsislinie und demjenigen Punkte der Curve ist, der um die

halbe Apsislinie oder grosse Achse von der Sonne entfernt ist; das ist in der Figur die Linie $d'm$. Nach der vorigen Berechnung wäre also die halbe kleine Achse = 0,99261, die grosse halbe = 1 angenommen; der Inhalt der Ellipse und damit der wenig davon abweichenden Ooide = 0,99261 $\times \pi$ = 3,118374; der Unterschied der halben grossen Achse oder des Radius des Hülfskreises und der halben kleinen Achse — und dieser Unterschied würde gleich der grössten Breite der Lunula zwischen dem Hülfskreise und der ovalen Bahn sein — = 0,00739.

Kepler irrt sich bei der Quadrirung der Curve. Er gibt die Construction zur Auffindung des Ortes der mittleren Entfernung und damit zur Berechnung der kleinen Achse folgendermassen an. Er sagt, nachdem er den Ort der mittleren Entfernung auf dem Hülfskreise in δ bestimmt hat, dass nun der Ort der mittleren Entfernung auf dem Oval gefunden würde, wenn man $ma = sm$ machte, von a aus eine Parallele mit $m\delta$ bis zur Peripherie des Hülfskreises zöge = af und dann f mit s verbände; er hat an Stelle des Kreises der hypothesis vicaria $m'dx$ den Hülfskreis mfp' auch zur Bestimmung der Anomalieen des Ortes angewendet. Man sieht, dass dadurch die kleine Achse mf' etwas kleiner und also die grösste Breite der Lunula etwas grösser wird. Er berechnet die grösste Breite der Lunula auf 858, im Masse des Radius = 100000, die kleine Achse also = 99142 und den Inhalt der Ooide auf 31146400000, während unsere Rechnung in demselben Masse den Inhalt = 31183740000 setzt. Da 858 nahezu die vierte Proportionale zu 100000 und 9264, d. h. zu dem Radius uud der Excentricität ist, so würde danach der Inhalt der Lunula = dem Inhalte des Kreises sein, dessen Radius = der Excentricität. Denn die Lunula ist = dem Hülfskreise minus der Ooide also = $100000^2\ \pi - 100000 \times (100000 - 858)\ \pi = 100000 \times 858\ \pi = 9264^2\ \pi$.

Um nun die in einer bestimmten Zeit seit der Epoche beschriebene Fläche und dann den derselben entsprechenden Bogen zu kennen, muss man zweitens das Problem lösen, die Ooide oder die dafür substituirte Ellipse von einem gegebenen Punkte auf der Achse — der Sonne — nach einem bestimmten

Verhältnisse zu theilen. Wenn z. B. der Ort zu finden wäre, wo sich der Planet nach Verlauf von $^1/_8$ seiner periodischen Zeit seit dem Aphelium befindet, so verhält sich die Fläche, die der radius vector in dieser Zeit beschreibt, zu dem Inhalt der ganzen Ooide wie 1 : 8, und wenn man also von der Sonne α (Fig. XXX) $^1/_8$ der Ooide abschneiden könnte, so würde der Punkt, in dem die Theilungslinie die Curve schnitte, der Ort des Planeten sein. Die Rechnung wäre folgende. Es sei der Planet in einer bestimmten Zeit von δ [dem Aphelium] nach ν gegangen. Diese Zeit wird gemessen durch die Fläche $\delta\alpha\nu$, wenn in α die Sonne ist. Fälle ich nun von ν auf die grosse Achse ein Perpendikel νC und verlängere dasselbe rückwärts, bis es den mit der halben grossen Achse über derselben construirten Kreis in B schneidet, so steht die Fläche $\delta\alpha\nu$ zur Fläche $\delta\alpha B$ in einem constanten Verhältniss, in dem der kleinen zur grossen Achse. Es kann also die gegebene Zeit auch durch die Fläche $\delta\alpha B$ gemessen werden, wenn man die halbe periodische Zeit durch den Halbkreis $\delta B\lambda$ misst; die Fläche $\delta\alpha B = S$ kann also leicht durch eine Proportion gefunden werden; sie verhält sich zum Halbkreis, wie die gegebene Zeit zur halben periodischen Zeit. Es kommt nun weiter darauf an, aus dem Inhalt der Fläche $B\alpha\delta$ den $\sphericalangle B\alpha\delta$ zu berechnen, der aber wieder leicht aus dem Centriwinkel $B\beta\delta$ berechnet werden kann, da ja der Radius βB und die Excentricität $\alpha\beta$ bekannt sind. Nun besteht die Fläche $B\alpha\delta$ aus dem Sector $B\beta\delta$ und dem Dreieck $\alpha B\beta$. Der Sector ist = der Hälfte des Productes aus dem Bogen, der zu dem gesuchten Winkel $B\beta\delta$ (x) gehört, und dem Radius $r = \frac{x}{360}\ r^2\pi$; das Dreieck $B\alpha\beta$ ist = der Excentricität $\alpha\beta$ $[\varepsilon]$, multiplicirt in den Sinus des gesuchten Winkels x, durch 2 dividirt $= \frac{\varepsilon.\ sin\ x}{2}$. Es bildet sich also die Gleichung $\frac{x}{360}\ r^2\pi + \frac{\varepsilon\ sin\ x}{2}$ = dem schon gefundenen Areal S, oder bezeichnet man die constanten Grössen $\frac{r^2\pi}{360}$ und $\frac{\varepsilon}{2}$ mit K und K', so ist die Gleichung auf-

zulösen $Kx + K' \sin x = S$. Durch Auflösung dieser Gleichung nach x hin wäre also der $\sphericalangle B\beta\delta$ und damit $B\alpha\delta$ gefunden. Daraus müsste nun schliesslich der $\sphericalangle \nu\alpha\delta$ gefunden werden. Dessen Tangente $\left(= \frac{\nu C}{\alpha C}\right)$ verhält sich zur Tangente von $\sphericalangle B\alpha C \left(= \frac{BC}{\alpha C}\right) = \nu C : BC$ oder wie die kleine zur grossen Achse; also ist $\sphericalangle \nu\alpha C$ mit dem Winkel $B\alpha C$ immer gegeben. —

Die Lösung des Problems hängt also von der Auflösung jener Gleichung $Kx + K' \sin x = S$ ab. Aber diese Gleichung ist eine transcendente, wol die erste transcendente Gleichung, die in der Geschichte der Wissenschaft auftritt, und konnte durch die damaligen Hülfsmittel der Mathematik nicht gelöst werden, wie auch jetzt ihre exacte Auflösung noch zu mühsam ist. Er versuchte es daher durch Näherungswerthe, dieselbe Methode, durch die, wissenschaftlich vervollkommnet, Gauss in seiner theoria motuum coelestium diese Gleichung aufzulösen lehrt.

Ist die vom radius vector beschriebene Fläche S der gegebenen Zeit proportional genommen, so muss man x so gross nehmen, dass sein Werth in die Gleichung substituirt derselben Genüge leistet und es mit so vielen Werthen versuchen, bis dies gelingt.

Es sei z. B. die seit dem Aphelium verflossene Zeit 181 Tage 8 St. 15′ oder 261135 Minuten, die mittere Anomalie also $= \frac{251135' \times 360^0}{989252'}$ (das ist die periodische Zeit des Mars) $= 95^0\ 18'\ 28''$.

Das vom radius vector beschriebene Areal, dass diesem Winkel entspricht (S), verhält sich zu dem Areal des Kreises $\delta B\lambda$ wie $95^0\ 18'\ 28'' : 360^0$ (oder 261135 Minuten zu 989252′); danach berechnet sich S (Fläche $\delta\alpha\vartheta$) auf 0,831718. Nimmt man nun an, der Winkel x ($\vartheta\beta\delta$) sei $= 90^0$, so muss dieser Werth der Gleichung $\frac{x}{360}\, r^2\, \pi + \frac{\varepsilon \sin x}{2}$ $= 0{,}831718$ Genüge leisten. $\frac{x}{360}\, r^2\, \pi$ wird dadurch $=$

$\frac{1}{4}\pi\,(r=1) = 0{,}785398$; $\frac{\varepsilon \sin x}{2} = \frac{0{,}09264}{2} = 0{,}046320$; die Summe also (Fläche $\vartheta\beta\delta + \vartheta\beta\alpha$) $= 0{,}831718$; der Werth von $x = 90^0$ als excentrische Anomalie ist also richtig angenommen. Der Winkel $\vartheta\alpha\beta$ ist nun $= \vartheta\beta\delta - \alpha\vartheta\beta$.

$tg\ \alpha\vartheta\beta = \frac{\alpha\beta}{\vartheta\beta} = 0{,}09264$; $\sphericalangle\ \alpha\vartheta\beta = 5^0\ 17'\ 4''$; $\vartheta\alpha\beta$ also $= 90^0 - 5^0\ 17'\ 4'' = 84^0\ 42'\ 56''$. Daraus wird endlich die anomalia coaequata $D\alpha\beta$ gefunden. Da $tg\ \vartheta\alpha\beta : tg\ D\alpha\beta$ = die grosse zur kleinen Achse oder $1 : 1 - 0{,}00858$ (nach Kepler) : 0,99142, so ist $tg\ D\alpha\beta = tg\ 84^0\ 42'\ 56'' \times 0{,}99142$; $\sphericalangle\ D\alpha\beta = 84^0\ 39'\ 42''$. Nimmt man die kleine Achse $= 1 - 0{,}00739$ (wie sie unsere Rechnung ergab) $= 0{,}99261$, so berechnet sich die coaequata auf $84^0\ 40'\ 5''$, also die Differenz nur $= 84^0\ 40'\ 5'' - 84^0\ 39'\ 42'' = 23''$; die hypothesis vicaria gibt für dieselbe anomalia media die coaequata $= 84^0\ 42'\ 2''$; also eine Differenz von $2'\ 20''$ oder $1'\ 57''$.

Berechnet man auf dieselbe Weise für die anomalia media $= 48^0\ 45'\ 12''$, die nach der hypothesis vicaria der anomalia excentrici $= 45^0$ entspricht, die anomalia coaequata, so ergibt sich dieselbe $= 41^0\ 14'\ 9''$, während die hypothesis vicaria $41^0\ 20'\ 33''$ angibt. Für die anomalia media $= 138^0\ 45'\ 12''$ und die excentrici $= 135^0$ berechnet sich die coaequata nach der letztern Methode $= 131^0\ 14'\ 5''$, nach der hypothesis vicaria auf $131^0\ 7'\ 26''$. Stellen wir diese aus den verschiedenen Hypothesen berechneten Werthe in einer vergleichenden Tabelle zusammen:

gemeinsch. anomalia		anomalia coaequata durch die			
excen.	media	hyp. vicaria	den fingirten Kreis	die Ooide	die Bisection
45^0	$48^0\,45'\,12''$	$41^0\,20'\,33''$	$41^0\,28'\,54''$	$41^0\,14'\ 9''$	$41^0\,15'\,31''$
90^0	$95^0\,18'\,28''$	$84^0\,42'\ 2''$	$84^0\,42'\,26''$	$84^0\,39'\,42''$	$84^0\,42'\ 2''$
135^0	$138^0\,45'\,12''$	$131^0\,7'\,26''$	$130^0\,59'\,25''$	$131^0\,14'\ 5'$	$131^0\,7'\,26''$

Aus dieser Vergleichung ergibt sich, dass in derselben Zeit, wo ein sich gleichmässig bewegender Planet von 45^0—135^0 fortschreite, also der radius vector 90^0 beschreiben

würde, der radius vector des Mars nach der hypothesis vicaria 89° 46′ 53″ (131° 7′ 26″ — 41° 20′ 33″); nach dem Keplerschen Gesetz unter Voraussetzung der Kreisbahn 89° 30′ 11″; nach demselben Gesetz unter Voraussetzung der Ooide 89° 59′ 56″ beschreibt; dass also, da die hypothesis vicaria mit der Beobachtung soweit übereinstimmt, dass sie für die heliocentrischen Längen als Controle gebraucht werden kann, dem Mars in den mittleren Theilen der Bahn unter Voraussetzung der Kreisbahn eine zu langsame, unter der Voraussetzung der Ooide und ihrer Gleichsetzung mit einer Ellipse eine zu rasche Bewegung zuertheilt wird oder dass, da die Geschwindigkeit umgekehrt der Entfernung von der Sonne proportional ist, die Entfernungen der mittleren Oerter unter jener Voraussetzung zu gross, unter dieser zu klein angenommen sein werden. Die wahren Entfernungen werden desshalb in der Mitte liegen. Es fragt sich nur, ob die Figur der Ooide falsch construirt oder nicht genau genug berechnet ist. Da die Berechnung aus der Bisection der Kreisbahn ziemlich genau mit der Berechnung aus der Ooide zusammenstimmt und bei einer kleinen Aenderung der Excentricität ganz genau damit übereinstimmen würde, so bestärkt dies Kepler in der Annahme, dass die Berechnung aus seinem Gesetz, dessen Beweis ihm ja auf dieser Bisection beruht, die richtige ist, und dass eine genauere Berechnung der Ooide, die ja mit der substituirten Ellipse nicht ganz zusammenfällt, die richtigen Anomalieen ergeben würde.

Widerlegung der Ooide.

Er versucht desshalb eine andere Methode, die auch mit seiner Erzeugungstheorie der Curve übereinstimmt. Er hatte angenommen, die Curve entstände dadurch, dass der Strahl der Kraft oder radius vector sich mit ungleichmässiger, der Planet selbst auf seinem Epicycel sich mit gleichmässiger Geschwindigkeit bewegte. Wenn man nun das Verhältniss der Beschleunigung und Verzögerung zu der gleichmässigen Geschwindigkeit kennte, so könnte man danach die Curve construiren und berechnen; da dasselbe aber nicht bekannt ist, so muss man auf empirischem Wege zur Construktion und

Berechnung der Curve zu gelangen suchen. Es sei (Fig. XXXI) *A* die Sonne, *GAG'* der circulus deferens, das heisst der Kreis, den das Centrum des Epicycels beschreibt; *BB'* der Kreis, den der Planet beschreiben würde, wenn er sich um das Centrum des Epicycels mit einer der Geschwindigkeit des Kraftstrahls immer proportionalen Geschwindigkeit bewegte. Da sich nun aber der Planet auf seinem Epicycel gleichmässig bewegt, so wird er sich rascher bewegen als der radius vector im Aphelium, und wenn dieser oder das Centrum des Epicycels den Winkel *GAD* zurücklegt, sich nicht, wie bei proportionaler Geschwindigkeit, in *F*, sondern etwa in *E* befinden, so dass die Entfernung *AF* schon zurückgelegt und *AE* die Entfernung des Planeten von der Sonne für die gegebene Zeit ist. Diese Zeit wird durch den Winkel gemessen, den der Planet um das Centrum des Epicycels beschrieben hat, da er um dieses sich gleichmässig bewegt, also in gleicher Zeit gleiche Winkel beschreibt, hier also durch den $\sphericalangle CDE$. Die Aufgabe ist also 1. die Grösse von *AE* und 2. den $\sphericalangle EAB = DAB - DAE$ zu finden.

1. Da *CDE* als Mass der Zeit bekannt ist, so ist es auch dessen Supplementswinkel *EDA*; ebenso *AD* als radius des deferens und *DE* als Radius des Epicycels. Daraus berechnet sich also die Linie *AE* und der $\sphericalangle DAE$.

2. Der Winkel *CAB*, d. h. der Bogen *GD* oder *BC*, würde durch die Bewegung des radius vector beschrieben werden, wenn dieses die einzige bestimmende Bewegung wäre, d. h. wenn die Kraft der Sonne allein wirkte und der Planet nicht noch eine zweite davon unabhängige Bewegung hätte. Dieser Kraftaufwand der Sonne für eine bestimmte Zeit wird nach Kepler durch die Summe der Entfernungen der Oerter von der Sonne gemessen, die der radius vector in dieser Zeit zurücklegt; die Kraftwirkung der Sonne aber in jedem Orte ist der Entfernung umgekehrt proportional. Nehme ich als mittlere Anomalie einen kleinen Winkel etwa 1^0, so kann ich die in dieser Zeit beschriebenen Entfernungen als gleich, den beschriebenen Bogen als Kreisbogen und dessen radius als Mass für die Summe der Entfernungen betrachten. Es verhält sich alsdann offenbar die mittlere Anomalie $= 1^0$

zu dem Winkel, den der Planet in dieser Zeit bei jener Entfernung wirklich beschreibt, wie diese Entfernung zur mittleren Entfernung, d. h. dem Quotienten aus der Summe aller Entfernungen für 360 °, dividirt durch 360. Die Summe aller für je einen Grad nach 1 berechneten Entfernungen ist nun = 36075562 (der Radius des Hülfskreises = 100000); die mittlere Entfernung ist also $= \frac{36075562}{360} = 100210$; bezeichnen wir nun die gesuchten Winkel mit x', x'', x''' und die entsprechenden Entfernungen mit r', r'', r''': so verhält sich $60' : x' = r' : 100210$,

$$x' \text{ also } = 60' \times \frac{100210}{r'}$$

$$x'' \quad = 60' \times \frac{100210}{r''} \text{ u. s. w.}$$

$$x' + x'' + x''' = 60' \times 100210 \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}\right).$$

Hiernach kann man also eine Tabelle anlegen, in der für ganzgradige mittlere Anomalieen der entsprechende Winkel (*CAB*) verzeichnet steht. Nimmt man eine noch kleinere Zeit als Einheit, so wird das Resultat natürlich noch genauer, und immerhin kann man auch dadurch die Rechnung genauer machen, dass man das arithmetische Mittel aus je zwei die Bögen begrenzenden Entfernungen als Radius der Bögen nimmt. Man sieht allerdings, dass man mit 1 ° anfangen und bis zum Perihelium 180 ° fortfahren muss, um die gesuchten Winkel (*CAB*) zu finden — von 180 ° bis 360 ° kehren dann dieselben Entfernungen wieder — und dass die Aufstellung der Tafel eine grosse Arbeit war. Aber Keplers Fleiss war ebenso genial wie seine Speculation. Er hat sogar verschiedene Tafeln mit verschiedenen Excentricitäten berechnet. Denn bei 180 ° anomalia media muss die berechnete anomalia coaequata auch 180 ° sein, und damit das möglichst genau Statt finde, d. h. damit die Entfernungen möglichst richtig werden, hat er es mit verschiedenen Excentricitäten versucht. Setzen wir zwei Beispiele der Rechnung für die Excentricität = 9165 her.

1. Die mittlere Anomalie CDE sei $= 1^0$, $\sphericalangle EDA$ also $= 179^0$. Daraus und aus $AD = 100000$, $DE = 9165$ berechnet sich

$$\sphericalangle DAE = 5' 3''$$
$$\sphericalangle DEA = 54' 57''$$
$$\text{Entfernung } AE = 108887.$$

Das arithmetische Mittel $\frac{AE + AB}{2} = \frac{108887 + 109165}{2}$

$= 109026.$

Der Winkel x' $(CAB) : 1^0$ oder $60' = 100210 : 109026.$

$\log (60' \times 100210) = 6{,}7790623$

$\log 109026 = 5{,}0375300$

Differenz $1{,}7415323$ n. $= 55, 148'.$

$\sphericalangle CAB = 55' 6''.$

Die anomalia coaequata $= \sphericalangle CAB - DAE = 55' 6'' - 5' 3'' = 50' 3''.$

2. Die anomalia media CDE sei $= 2^0$; alsdann ist

$$\sphericalangle DAE = 10' 10''$$
$$\sphericalangle DEA = 1^0 49' 50''$$
$$\text{Entfernung } AE = 108005.$$

Das arithmetische Mittel $= \frac{108005 + 108887}{2} = 108446.$

$$x'' = \frac{60' \times 100210}{108446} = 55' 24''.$$

$$x' + x'' = 55' 6'' + 55' 24'' = 110' 30''.$$

Die anomalia coaequata $= x' + x'' - DAE = 110' 30'' - 10' 10'' = 100' 20'' - 1^0 40' 20''.$ —

Aber auch diese Berechnung gibt die anomaliae coaequatae um die Apsides zu gering, in den mittleren Längen zu gross, oder die Geschwindigkeit dort zu klein, hier zu gross an.

Kepler versucht noch 6 andere Methoden in der Erwartung, dass je genauer die Rechnung um so grösser die Uebereinstimmung mit der hypothesis vicaria sein würde. Von diesen Methoden wollen wir nur noch die letzte betrachten:

Theilt man die Curve durch Linien, die an der Sonne gleiche Winkel bilden, so dass also die dadurch abgeschnittenen Bogen der Curve von der Sonne aus gleich erscheinen, und sind diese Winkel hinlänglich klein genommen, so verhalten sich die wirklichen Längen dieser Bogen wie die Entfernungen von der Sonne, und wenn also der Planet sich gleichmässig bewegte, so würde die Zeit, die er gebrauchte, um diese Bogen zu durchlaufen, im einfachen Verhältnisse zu der Entfernung von der Sonne stehn. Da nun aber die Zeit, die der Planet gebraucht, um wirklich gleich grosse Bogen zu durchlaufen, auch im geraden Verhältnisse zur Entfernung steht, so stehn die Zeiten, in denen der Planet jene scheinbar gleichen, aber in Wirklichkeit mit der Entfernung wachsenden Bogen durchläuft, im Verhältnisse des Quadrats der Entfernungen dieser Bogen von der Sonne. Nehme ich also an, (Fig. XXXII) *a* sei die Sonne, $\sphericalangle$ *bac, cad, dae* seien gleich und die Bogen *bc, cd, de* klein genug, um als Kreisbogen gelten zu können, so dass das arithmetische Mittel zwischen *ab* und *ac*, zwischen *ac* und *ad*, *ad* und *ae* als Mass der Grösse von *bc*, *cd*, *de* und ihr reciprocer Werth ebenso als Mass der Geschwindigkeit an diesen Stellen gelten kann, so stehn die Zeiten, die der Planet gebraucht, um diese Bogen wirklich zu durchlaufen, im Verhältniss des Quadrats der als Entfernungen angenommenen arithmetischen Mittel, und ebenso die Summe dieser Bogen in dem Verhältniss der Summe der Quadrate dieser Entfernungen. Bezeichnet man also die Zeit mit t, die Entfernung mit r' und mit K eine Constante, so ist $t = Kr'^2$. Construirt man nun zu den Entfernungen r' und dem Radius oder der halben Achse r vierte Proportionalen p, so dass sich verhält: $r : r' = r' : p$, so ist $pr = r'^2$; t also $= Kpr$, oder bezeichnet man Kr, das constant ist, mit $K' = K' p$. Diese vierten Proportionalen messen also die Zeit eines jeden Bogens und die Summe der Proportionalen die Summe der Zeiten. Die periodische Zeit ϑ wird also durch die Summe aller dieser Proportionalen gemessen (σ); die Constante K' wird daher aus der Proportion $t : p = \vartheta : \sigma$ gefunden, $t = p\frac{\vartheta}{\sigma}$, $K' = \frac{\vartheta}{\sigma}$.

Man sieht, wie auch hier die Proportionalen für alle Grade von 1 ⁰ bis 180 ⁰ berechnet und in einer Tabelle zusammengestellt werden mussten, um dann für eine beliebige anomalia coaequata, deren Gradwerth in ganzen Zahlen ausgedrückt war, die entsprechende media zu finden. Es wird also hier die Richtigkeit der Entfernungen auf umgekehrtem Wege durch die aus ihnen und den zugehörigen anomaliis coaequatis sich ergebenden mediae geprüpft, während vorher aus den Entfernungen und den mediis die coaequatae berechnet wurden. Es muss desshalb, wenn die Proben richtig sind, ein plus der media hier einem minus der coaequata dort entsprechen und umgekehrt. Und so ist es auch der Fall. Das Verhältniss machen folgende Tabellen der zwei letzten Proberechnungen anschaulich.

1. an. media	coaequata	nach der hyp. vic.	Differenz
45 ⁰	37 ⁰ 56′ 43″	38 ⁰ 5′	etwa 8′ —
90 ⁰	79 ⁰ 26′ 35″	79 ⁰ 27′	0
120 ⁰	110 ⁰ 28′ 8″	110 ⁰ 18′ 20″	etwa $9\frac{2}{3}$′ +
150 ⁰	144 ⁰ 16′ 49″	144 ⁰ 8′	9′ +.

2. coaequata	media	nach der hyp. vic.	Differenz
41 ⁰	48 ⁰ 24′ 3″	48 ⁰ 19′ 2″	5 + etwa
81 ⁰	91 ⁰ 30′ 39″	91 ⁰ 34′ 8″	$3\frac{1}{2}$′ —
91 ⁰	101 ⁰ 28′ 10″	101 ⁰ 34′ 7″	6′ —
131 ⁰	138 ⁰ 28′ 5″	138 ⁰ 39′ 28″	11′ —

Das übereinstimmende Resultat dieser Rechnungen ist also, dass nach der Theorie der Ooide die heliocentrischen Entfernungen in den mittleren Oertern kleiner werden, als die davon abhängige Schnelligkeit der Bewegung sie anzunehmen erlaubt. Es ergibt sich daraus die Nothwendigkeit, die Berechnungen der Entfernungen aus den Beobachtungen im umfangreicheren Masse anzustellen, um das Gesetz hrer Ab- und Zunahme erforschen zu können. Die von Kepler zu diesem Zwecke wieder von Neuem aus den Tychonischen Beobachtungen berechneten Entfernungen sind folgende:

Die Messung der heliocentrischen Entfernungen des Mars und der inductive Beweis der Heliocentricität.

Im Jahre 1589, 6. Mai, $11^1/_2$ Uhr Abends waren die Daten der Beobachtung folgende:

der gäocentrische Ort des Mars war in $27^0\ 7'\ 20''$ ♎ (6ˢ)
die Breite . . . . . $0^0\ 6'\ 40''$ nördl.

Zu gleicher Zeit war
der mittlere Ort des Mars (nach der anom. media) . . . . . $26^0\ 0'\ 36''$ ♏ (7ˢ)
der Ort der Sonne . . . . . $25^0\ 28'\ 40''$ ♉ (1ˢ)

Die Entfernung der Erde von der Sonne nach der Keplerschen Tafel 101365.

Daraus kann man 1. den heliocentrischen Ort des Mars nach der hypothesis vicaria und 2. seine Entfernung von der Sonne berechnen.

1. Es sei (Fig. XXXIII) *a* die Sonne, *b* der Mittelpunkt der Achse, *c* das punctum aequans, *d* das Aphelium, *e* der Ort des Mars, so fällt

ad in $28^0\ 51'\ 10''$ ♌ (4ˢ)
ce in $26^0\ 0'\ 36''$ ♏ (7ˢ)

---

anomalia media $\sphericalangle dce = 87^0\ 9'\ 56''$. Daraus, aus $bc = 7232$ und $be = 100000$ berechnet sich die anomalia excentrici $dbe = 83^0\ 0'\ 54''$; daraus, aus *be* und $ab = 11332$ die anomalia coaequata $dae = 76^0\ 41'\ 2''$;

ad fällt in $28^0\ 51'\ 10''$ ♌ (4ˢ)
also *ae* in $15^0\ 32'\ 12''$ ♏ (7ˢ)

2. Es sei (Fig. XXXIV) *O* die Sonne, *M* der Ort des Mars, *A* die Erde.

OM fällt in $15^0\ 32'\ 12''$ ♏
OA fällt in $25^0\ 48'\ 40''$ ♏

$\sphericalangle MOA = 10^0\ 16'\ 28''$

AO fällt in $25^0\ 48'\ 40''$ ♉ (1ˢ)
AM in $27^0\ 7'\ 20''$ ♎ (6ˢ)

$\sphericalangle MAO = 151^0\ 18'\ 40''$

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

MO fällt in $15^0\ 32'\ 12''$ ♉ (1^s)
MA in $27^0\ 7'\ 20''$ ♈ (0^s)

$\sphericalangle AMO = 18^0\ 24'\ 52''$

$$MO = \frac{\sin 151^0\ 18'\ 40''}{\sin\ 18^0\ 24'\ 52''} \cdot 101365\ (OA)$$

$= 154110 =$ Entfernung des Ortes in der Ekliptik von der Sonne.

Da die Breite nur $6'\ 40''$ (+) beträgt, so ist die Entfernung des Ortes in der Marsbahn selbst $= \frac{154110}{\cos 6'\ 40''}$, ebenfalls $= 154110$.

Zum zweiten Mal ist der Mars nach 3 Umwälzungen fast an demselben Orte beobachet am 28. Decbr. 1594 $7^1/_2$ Uhr Morgens, wo seine mittlere Länge in ♏ (7^s) $26^0\ 13'\ 39''$ fiel; also die mittlere Anomalie nur um $13'\ 3''$, oder wenn man die Präcession der Nachtgleichen (für diese Zeit $= 4'\ 48''$) in Abzug bringt, nur um $8'\ 15''$ grösser als die der früheren Beobachtung. Die Daten waren folgende:

Der Planet erschien in einer Entfernung von $50^0\ 34'$ von der spica der Jungfrau in einer Höhe von 8^0 oder 9^0. Die Breite der spica ist $1^0\ 59'$. In dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ABC bezeichne BA die Ekliptik, B den Ort des Mars, C den der spica; so ist also

$a = 50^0\ 34'$
$b = 1^0\ 59'$

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b};\ c = 50^0\ 32'\ 18''.$$

CA fällt in $18^0\ 11'$ ♌ (6^s), der Mars würde also in $8^0\ 43'\ 18''$ ♐ (8^s) fallen, wenn er gerade im Knotenpunkte sich befände; seine Breite ist $9'\ 20''$, wodurch sein gäocentrischer Ort wenig geändert wird; Kepler nimmt $8^0\ 43'$ ♐ (8^s) an. Dazu kommt noch die Correctur wegen der Refraction, die Kepler auf $3'\ 36''$ + ansetzt; also wird der gäocentrische Ort des Planeten in $8^0\ 46'\ 20''$ gesetzt werden können. Der Unterschied der Entfernungen zwischen diesem Orte und dem zuerst beobachteten von der Sonne kann nur sehr gering

sein; auf einen Grad kommt in diesen mittleren Oertern etwa eine Differenz der Distanz von 240 Einheiten; der Unterschied der anomalia media beträgt etwa 8′, also der Unterschied der Entfernungen den $7^1/_2$ Theil von 240 = 32 Einheiten; ist also die frühere Entfernung richtig berechnet, so muss die jetzige genau genug 154080 betragen. Und berechnet man nun aus dieser Länge und den übrigen Daten den heliocentrischen Ort des Mars, und stimmt dieser mit dem aus der hypothesis vicaria sich ergebenden überein, so ist die Entfernung richtig berechnet. Die übrigen Daten aber sind folgende, wenn *B* (Fig. XXXIV) der Ort der Erde für diese zweite Beobachtung ist:

BM fällt in 8° 46′ 20″ ♐ (8ˢ)
der Ort der Sonne
BO in 16° 47′ 10″ ♌ (9ˢ) oder *OB* in 16° 47′ 10″ ♋ (3ˢ).

∢ *OBM* = 38° 0′ 50″

OB = 98232; also sin *OMB* = sin 38° 0′ 50″ × $\frac{98232}{154080}$; ∢ *OMB* = 23° 7′ 6″; *OM* fällt also in 15° 39′ 14″ ♏ (7ˢ). Bei der ersten Beobachtung fiel die heliocentrische Gesichtslinie 15° 32′ 12″ (7ˢ); der Unterschied der anomalia coaequata ist also = 7′ 2″, für einen Unterschied der media = 8′ 15″, ein Verhältniss, das sich in diesen Längen auch fast ebenso aus der hypothesis vicaria ergibt. Nur ist der Precession der Nachtgleichen wegen = 4′ 48″ der Ort um diese Grösse in die Folge der Zeichen vorgerückt; die coaequata der Rechnung ist also um 4′ 48″ zu klein. Man muss also die beiden Oerter noch um 4′ 48″ auseinanderrücken; bei der ersten Beobachtung also *OM* in die Präcedenz der Zeichen zurück-, bei der zweiten in die Folge der Zeichen vorschieben. Diese Correctur der Beobachtung lässt sich dadurch bewerkstelligen, dass man *OM* grösser annimmt; Kepler bestimmt es auf 154400 in der ersten und 154368 in der zweiten Beobachtung. Alsdann ist:

1. sin ∢ *AMO* = sin 151° 18′ 40″ × $\frac{101365}{154400}$; *AMO* = 28° 22′ 12″;

MA fällt in 27° 7′ 20″ 0ˢ. *MO* also in 28° 22′ 12″ + 17° 7′ 20″ — 30 = 15° 29′ 32″ 1ˢ, also *OM* in 15° 29′ 32″ 7ˢ (♏).

2. $\sin \measuredangle OMB = \sin 38^\circ 0' 50'' \times \frac{98232}{154368}$; $\measuredangle OMB = 23^\circ 4' 21''$.

MB fällt in 8° 46′ 20″ ♊ (2ˢ), *MO* also in 30° + 8° 46′ 20″ — 23° 4′ 21″ = in 15° 41′ 59″ 1ˢ;

OM in 15° 41′ 59″ 7ˢ oder ♏.

So fallen die beiden beobachteten Oerter des Mars heliocentrisch 12′ auseinander, was verlangt wurde (7′ 2″ + 4′ 48″).

Auf diese Weise berechnet er die Entfernungen einer Anzahl von Oertern in der absteigenden und aufsteigenden Hälfte, deren Werthe folgende Tabelle angibt:

anomalia coaequata	Grösse der Entfernung
76° 43′ 8″	154400
360° — 76° 25′ 48″	154387
61° 17′ 35″	158111
360° — 63° 45′ 18″	157631
37° 0′ 57″	163100
360° — 36° 40′ 2″	163051
10° 3′ 37″	166208
360° — 8° 28′ 25″	166311
103° 15′ 48″	147760
360° — 104° 37′ 13″	147700
161° 5′ 29″	139036
360° — 161° 38′ 15″	139000

Diese Tafel, deren Zweck es war, zur Controle über die Entstehungstheorie der Bahncurve zu dienen, zeigt zugleich

1. dass die Oerter, die gleichweit vom Aphelium oder Perihelium entfernt sind, auch gleichweit von der Sonne entfernt sind; dass also 2. die Curve zu der durch die Sonne selbst gelegten Achse symmetrisch ist, und dass 3., da diese Lage die einzige ist, in der die Achse die beiden Hälften

der Curve, die ab- und aufsteigende, symmetrisch zu einander macht, die Achse durch die Sonne selbst gelegt werden muss. Dadurch hat also Kepler seiner ersten Intuition, dass die Sonne selbst der Regulator der planetarischen Bewegung wäre, nicht nur den früheren Systemen gegenüber, wie durch die hypothesis vicaria, sondern der Natur selbst gegenüber ihr Recht bewiesen. — Zugleich lassen sich die dem Aphelium und Perihelium naheliegenden Beobachtungen benutzen, um die Grösse der Achse und die Excentricität der Bahn zu berechnen. Die Entfernung des Apheliums berechnet Kepler auf . . . . . 166465, die des
Periheliums auf . . . 138234

---

die Achse auf . . . 304699
die Hälfte der Achse . 152349½ oder 152350
die Excentricität . . 14115 im Masse des Radius der Erdbahn = 100000;
die halbe Achse der Marsbahn = 100000 gesetzt, wird sie = 9264 oder 9265.

Die Wangenlinie (linea buccosa).

Aber wie verhalten sich diese Entfernungen zu der Speculation über die Erzeugung der Bahncurve, zu deren Prüfung sie eigentlich berechnet sind? Wenn man unter der Voraussetzung der durch die Bisection gefundenen Excentricität und der Kreisfigur der Bahn nach dem Keplerschen Gesetz die Anomalieen berechnete, so waren diese in den mittleren Längen, an der hypothesis vicaria gemessen, zu klein; die Geschwindigkeit war also zu gering und die Entfernungen, mit denen die Geschwindigkeit im umgekehrten Verhältnisse steht, zu gross angenommen. Berechnete man dieselben Anomalieen auf dieselbe Weise unter der Voraussetzung, dass die Bahn die Figur einer Ooide habe, so ergaben sich nach derselben Schlussfolgerung die Entfernungen in den mittleren Längen zu klein; die richtigen Entfernungen liegen also jedenfalls zwischen beiden, vermuthlich in der Mitte. Nun hatte Kepler die Breite der Lunnula zwischen dem Hülfskreise und der Ooide auf 858 berechnet; die wahre

Breite beträgt also vermuthlich 429. Derselbe Unterschied findet aber zwischen dem radius vector (Fig. XXXIII) der anomalia excentrici = 90 ⁰ oder dem Radius des Hülfskreises (*bf*) und dem radius vector der entsprechenden anomalia coaequata = *af* statt. Denn der Winkel *afb* war auf 5 ⁰ 18′ berechnet, und daraus wird (*bf* = 100000 gesetzt) *af* = *bf* × sec. ∢ *bfa* = 100429 nahezu. Dieser Winkel ist die grösste Differenz zwischen der anomalia excentrici und coaequata oder die grösste aequatio optica; jene Breite der Lunala (429) ist die grösste Differenz zwischen der Entfernung des Planeten von der Sonne oder dem radius vector, durch dessen Bewegung die anomaliae coaequatae und der Entfernung des Planeten von der Mitte der Bahn oder dem radius, durch dessen Bewegung die anomaliae excentrici beschrieben werden. Während also bei der Voraussetzung der Kreisbahn als die der anomalia excentrici = 90 ⁰ entsprechende Entfernung des Planeten von der Sonne die Secantenlinie *af* der dazu gehörenden aequatio optica genommen wurde, stellt sich heraus, dass die richtige Entfernung durch die zu dieser Secantenlinie zugehörigen Cosinuslinie gemessen wird; und wenn man diese Erfahrung verallgemeinert, so wird statt der Secantenlinie die jedesmalige Cosinuslinie der aequatio optica als die Entfernung genommen werden müssen, die dem durch diesen Winkel bestimmten Orte zukommt; statt *af* — *bf* statt *ae* — *eg*, statt *ah* — *ih* u. s. w. Und berechnet man; diese Linien nach dem Keplerschen Gesetz, so stimmt das Resultat mit dem durch die unmittelbaren Daten der Beobachtung berechneten überein; z. B. für die anomalia coaequata = 104 ⁰ 37′ 13″ (*bah* Fig. XXXIII) war die Entfernung aus den Beobachtungen nach der obigen Tabelle auf 147700 berechnet. Nimmt man nun die Excentricität = 9265, so ist der sinus der zugehörigen aequatio optica (∢ *bha*) = 9265

$$\sin 104^0\ 37'\ 13'' \times \frac{9265}{100000} = 5^0\ 8'\ 6''$$

; die Secantenlinie *ah* ist

$$= 9265 \times \sin \left(\frac{5^0\ 8'\ 6'' + 104^0\ 37'\ 13''}{\sin 5^0\ 8'\ 6''} \right)$$

= 97263,87 oder 97264; die Cosinuslinie *hi* = 97264 × cos 5 ⁰ 8′ 6″ = 96874; d. h. im Masse der mittleren

Entfernung des Mars; im Masse des Radius der Erdbahn, worin jene 147700 berechnet sind, ist 96874 = $\frac{96874 \times 152342}{100000}$ = 147680; gegen 147700 nur um eine verschwindende Differenz von 20 verschieden. Man sieht hier wieder, wie Kepler mit sicherem Blicke in dem einzelnen Falle die Regel erkennt, aber zur Wahrheit gelangte er auch jetzt noch nicht; er musste erst noch einen Irrthum bekämpfen. Indem er nämlich nach dem Schlusse der Analogie aus der für die excentrische Anomalie = 90 ^{0} gefundenen Entfernung für die ganze Curve die Regel aussprach, dass nicht die Secantenlinie, sondern die Cosinuslinie der aequatio optica die richtige Entfernung des Planeten von der Sonne darstellte, blieb für die Construktion und die Berechnung der anomalia coaequata eine doppelte Möglichkeit übrig. Vergleicht man nämlich die anomalia excentrici *pma* mit *oma* (Fig. XXXV), so sieht man, dass die Linie *om* bei der anomalia excentrici = 90^0 zwei wichtige Linien vertritt, sowohl den Radius des fingirten Kreises als das Perpendikel von dem Orte des Planeten auf die Achse, während diese beiden Linien bei den andern excentrischen Anomalieen, die nicht vollständige Quadranten des Kreises bezeichnen, in zwei auseinanderfallen, z. B. bei der anomalia *pma* in die Linie *pm* und *pc*, und es frug sich also, ob der Ort des Planeten der Scheidungspunkt wäre, den der mit der Cosinuslinie von der Sonne *s* aus geschlagene Kreis mit dem Radius des Hülfskreises oder der, den derselbe mit dem Perpendikel *pc*, der Sinuslinie der anomalia excentrici, gemein hat. Kepler entschied sich zunächst für die erstere Möglichkeit, und zwar aus folgenden Gründen.

Er hatte 2 Theorieen aufgestellt, um die Excentricität der Bahn und damit die Veränderungen der Entfernungen von der Sonne zu erklären. Einmal hatte er dieselben durch die Verbindung einer ungleichmässigen Kreisbewcgung des radius vector mit einer Libration des Planeten auf dem radius vector innerhalb der Grenzen der grössten und kleinsten Entfernung entstehen lassen, das anderemal durch die Verbindung zweier Kreisbewegungen, einer ungleichmässigen des radius vector

und einer gleichmässigen des Planeten selbst auf seinem Epicycel. Er hatte damals die letztere Erklärung angenommen, weil bei der ersteren die Libration bei gleichen mittleren Anomalien ungleich war. Jetzt wo die angenommene Erzeugungstheorie der ovalen Bahn unhaltbar geworden ist, da die Entfernungen, welche aus der Beobachtung mit den Entfernungen nicht übereinstimmen, welche aus der Theorie berechnet sind, versucht er es nunmehr mit der anderen früher verworfenen, wonach die Entstehung der nun gefundenen wahren Entfernungen folgendermassen erklärt werden kann.

Während der radius vector oder der Strahl der Kraft (Fig. XXVI) den Planeten herumdreht, librirt also der Planet auf dem radius vector innerhalb der Grenzen der grössten und kleinsten Entfernung, d. h. innerhalb der Entfernung des Apheliums *AO* und des Periheliums *AO'*, oder wenn man mit der Excentricität als Radius einen Epicycel schlägt *oo'*, dessen Mittelpunkt um den Radius des eccentricus *OO'* = *MO* von der Sonne α entfernt ist, innerhalb der Grenzen des Durchmessers *oo'* dieses Epicycels. Wäre nun die Figur der Bahn ein Kreis, so würde der Planet in den Zeiten, die durch die Winkel *OMB*, *BMC*, *CMO'* oder die diesen gleichen Winkel $o\mu\beta$, $\beta\mu\gamma$ $\gamma\mu o'$ gemessen werden, die Entfernungen *AB*, *AC*, *AO'* oder $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha o'$ erreicht haben. Nun aber ist die Bahn kein Kreis, und die richtigen Entfernungen sind statt dieser Secantenlinien der aequationes opticae die entsprechenden Cosinuslinien von den Winkeln *ABM*, *ACM*, oder da die Dreiecke $\alpha\beta u$, $\alpha\gamma u$ aus den 3 Seiten den Dreiecken *ABM*, *ACM* congruent sind, statt der Linien $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ die den Winkeln $\beta\alpha u$, $\gamma\alpha\mu$ zugehörigen Cosinuslinien $\alpha\varkappa$, $\alpha\lambda$. Der Planet hat sich also nicht um die Grössen $o\iota$, $\iota\eta$, sondern um $o\varkappa$, $\varkappa\lambda$ der Sonne während der anomaliae mediae $o\mu\beta$, $\beta\mu\gamma$ genähert. Und dann sind wenigstens beim Aphelium und Perihelium für gleiche anomaliae mediae die Librationen auch gleich. Diese für die gegebene Zeit richtige Entfernung z. B. αk lässt sich aus dem Epicycel so in den eccentricus übertragen. Man trage die mittlere Anomalie $o\mu\beta$ in den Mittelpunkt *M* (Fig. XXXVI) an = *OMP*; alsdann schlage ich von der Sonne *A* aus einen zweiten Kreis mit demselben Radius *MO*

oder $\alpha\mu$ und ziehe eine Parallele, bis sie den von A mit dem Radius MO geschlagenen Kreis trifft, die Linie AH, schlage von H aus einen Epicycel mit der Excentricität $AM = \mu o$ den Kreis HPQ — denn dieser Epicycel geht durch P, da $HA \parallel$ und $= PM$, also $PH = AM =$ dem Radius des Epicycels — und fälle von P aus einen Perpendikel auf AH, PX, so ist AX die richtige Entfernung des Planeten für die Zeit OMP oder PHQ. Die entsprechende coaequata konnte nun nach der Analogie der media von 90^0 entweder gefunden werden, wenn man mit AX einen Kreisbogen nach dem Radius PM oder nach dem Perpendikel PR schlug, so dass die coaequata gleich $P'AO$ oder $= R'AO$ wurde, in jenem Falle grösser, in diesem kleiner. Da nun QX, das durch den Perpendikel von AQ abgeschnittene Stück der sinus versus des $\sphericalangle PHX$ oder OMP ist, so vermuthete Kepler, die Entfernung AX müsste durch den HX entsprechenden Schenkel PM begrenzt werden, die entsprechende coaequata wäre also der Winkel $P'AO$. Der Zug, der die auf diese Weise bestimmten Oerter verbindet, ist, wie Kepler sie nennt, eine linea buccosa, d. h. er hat die Form eines Längendurchschnittes durch die Wangen, die oben mehr heraustreten und unten mehr eingedrückt sind.

Construire ich nämlich den Ort für die anomalia media $180 - OMP$; und es entspreche LM der Linie PM, SA der Linie QA, LY entspreche PX, AY AX, AL' AP'; alsdann sind PXP' und LYL' rechtwinklige Dreiecke; in diesen sind die Katheten LY und PX einander gleich, XP' ist aber grösser als YL', weil der Radius AX grösser ist als AY und jener also bei gleicher Winkelbewegung einen grösseren Bogen XP' beschreibt als dieser YL'; also muss die andere Kathete PP' kleiner sein als LL'. Die Curve hat also in gleichen Entfernungen vom Aphelium und Perihelium keine gleiche Breite der Lunula zwischen ihr und dem über der Achse beschriebenen Hülfskreise oder auch keine gleiche Entfernung des Ortes von der Achse. Sie ist am Perihelium mehr eingedrückt als am Aphelium.

Die Ellipse.

Schon diese unsymmetrische Gestalt und dann die Erfahrung, dass bei der Berechnung der coaequata aus der Fläche

dieselbe um 5 Minuten zu gross werden konnte, bestimmte Kepler, die Begrenzung der wahren Entfernungen durch den Radius des Hülfskreises aufzugeben und statt dessen dieselben durch das von dem Endpunkte des radius vector der mittleren Anomalie auf die Achse gefällte Perpendikel begrenzen zu lassen, durch PR und LT, so dass R' und T' die richtigen Oerter sind. Jene Winkeldifferenz ist der Winkel $P'AR'$ oder $L'AT'$. Der Zug aber, der diese Oerter verbindet, ist eine Ellipse (Fig. XXXVI u. XXXVII). Construire ich nämlich über dem Durchmesser des Hüfskreises OO' als grosser Achse und mit der Excentricität μo oder MA eine Ellipse, mit dem Brennpunkt A, trage die mittlere Anomalie $o\mu\beta$ in M an den Hülfskreis an $= OMP$, fälle von P aus ein Perpendikel auf die grosse Achse OO', das Perpendikel PR, das die Ellipse in R' schneide, so ist R' der gesuchte Ort des Planeten für die Zeit OMP und $R'A$ die gesuchte Entfernung $= \alpha\varkappa$.

Beweis.

Setze ich $AR' = v$, $AP = v'$, $R'R = p$, $PR = p'$ $RA = d$, die Excentricität MA oder $\mu\beta = e$; MO, die halbe grosse Achse, $= r$, die halbe kleine $(\sqrt{r^2 - e^2}) = b$; so ist:

$$v'^2 = p'^2 + d^2$$
$$v^2 = p^2 + d^2$$
$$\overline{v'^2 - v^2 = p'^2 - p^2}$$

Nun ist das Dreieck $\beta\mu\varkappa \sim$ dem Dreieck PMR (aus 2 Winkeln; die Winkel bei μ und M sind die mittleren Anomalieen, die bei $\varkappa$ und R sind Rechte); also ist

$$\beta\varkappa = \mu\beta \times \frac{PR}{PM} = \frac{e.\,p'}{r}$$

$$\text{und } \beta\varkappa^2 = \frac{e^2 p'^2}{r^2};$$

e^2 ist aber $= r^2 - b^2$, also $\beta\varkappa^2 = \frac{(r^2 - b^2)}{r^2} p'^2 = p'^2 - \frac{b^2 p'^2}{r^2}$,

$\frac{b^2}{r^2} \times p'^2$ ist aber $= p^2$; da

$p' : p = r : b$; also $\beta\varkappa^2 = p'^2 - p^2$;

$p'^2 - p^2$ war aber $= v'^2 - v^2$, also $\beta\varkappa^2 = v'^2 - v^2$; $\beta\varkappa^2$ ist

aber auch $= \alpha\beta^2 - \alpha\varkappa^2$; $\alpha\beta$ ist $= AP = v'$ und $\alpha\beta^2 = v'^2$; also $v'^2 - \alpha\varkappa^2 = v'^2 - v^2$ oder $\alpha\varkappa^2 = v^2$ und $\alpha\varkappa = v = R'A$.

Jene Cosinuslinie der aequatio optica ist ein Leitstrahl der Ellipse von dem Brennpunkte A nach dem Orte des Planeten R': die Oerter des Planeten bilden also eine Ellipse, deren einer Brennpunkt die Sonne (A) ist.

Das dritte Gesetz.

Die Architektonik des Planetensystems.

Durch die Verfolgung der beiden Gedanken also, dass der Indifferenzpunkt der planetarischen Bewegung in der Sonne selbst läge, und dass das punctum aequans der Bahn der Erde ebenso gut zukäme, als den übrigen Planetenbahnen, war Kepler zu den Vorstellungen der Kraft und der Stetigkeit der Bewegung, zur mathematischen Definition der stetig wirkenden oder constanten Kraft und zur Erkenntniss der besondern Form der planetarischen Bewegung gelangt, die durch die stetig wirkenden Kräfte derselben gebildet wird. Aber er hatte noch einen dritten Jugendgedanken, dem er sein Leben lang treu blieb und seine Arbeit widmete, dass nämlich der ganze Weltenbau wirklich ein Gebäude, der Ausdruck einer göttlichen Idee, die Verwirklichung der höchsten geometrischen Schönheit sei. Diesem tiefen Geiste war es Bedürfniss, von den Erscheinungen zu den letzten Gründen fortzugehn und die Wirklichkeit in ihrer Nothwendigkeit zu begreifen. Und gerade darin sah er den Beweis für die Richtigkeit der Copernikanischen Weltordnung, wenn sich daraus ein Gesetz der Ordnung ableiten und die Welt eben als ein *κόσμος* begreifen liess. Diesen Beweis aber zu finden war ja die Hoffnung seines Lebens und der Inhalt seiner Gebete. Er forschte desshalb schon vom Anfang seiner astronomischen Studien nach dem Grunde für die Anzahl, die Entfernungen und die periodischen Zeiten der Planeten. Das Gesetz der Entfernungen suchte er Anfangs in einfachen Zahlenverhältnissen; da dies ihm aber nicht gelang, und auch die Einschiebung zweier hypothetischen Planeten, des einen zwischen Mars und Jupiter, des andern zwischen Merkur und Venus,

ihm nichts helfen konnte, so sann er darüber nach, ob das Gesetz nicht durch das Verhältniss bedeutungsvoller Linien im Quadranten ausgedrückt wurde, wozu er wol durch die in der Astronomie und Astrologie grosse Bedeutung der Configuration im Quadrate veranlasst worden sein mag. Es sei (Fig. XXXVIII) *BCD* ein Quadrant, dessen Radius = dem Radius des Universums, und man vervollständige denselben zu einem Quadrate *ACBD*. In *A* denke man sich die Sonne, trage auf *AC* die Entfernungen der Planeten von *A* ab und ziehe durch die Theilpunkte Parallelen mit dem Radius *BC* (*EF*, *GH* u. s. w.) bis zum Durchschnitt mit dem Kreisbogen *DC*. Nun frug Kepler, ob nicht etwa diese Parallelen die Kraft der Bewegung mässen und im umgekehrten Verhältnisse zur periodischen Zeit der Planeten ständen, so dass die periodische Zeit der Sonne, wo die Kraft ohne Entfernung wirkte, = *0* wäre, die periodische Zeit des Merkur zu der des Saturn wie *MN* : *EF* sich verhielte u. s. w. Es würden dann, wenn wir *B* mit den Theilpunkten des Bogens verbinden und die dadurch entstehenden Winkel *CBF*, *CBH*, *CBN* mit φ, sowie die Entfernungen *AE*, *AG* ..., *AM* mit *e* bezeichnen, und den Radius = 1 setzen, die Entfernung *e* dem Werthe $1 - \sin \varphi$ direct und die periodische Zeit *t* dem Werthe $1 - \cos \varphi$; umgekehrt proportional sein. Auch diese Speculation war ohne Resultat. Da fiel ihm, wie sein Geist von dieser Frage eingenommen war, in einer Mathematikstunde zu Gräz, wo er die grossen Conjunctionen zwischen Jupiter und Saturn von 8 zu 8 Zeichen darstellte und wie die Verbindungslinien dieser Oerter eine continuirliche Reihe von regelmässigen congruenten Dreiecken bildeten, so dass die Durchschnittspunkte der Seiten dieser Dreiecke auf Kreisen liegen, — bei dieser Darstellung fiel ihm auf, dass der innerste einbeschriebene und äusserste umschriebene Kreis sich etwa zu einander verhielten wie die Kreise des Jupiter und Saturn. Das Dreieck, sagte er, ist die erste Figur, Saturn und Jupiter sind die ersten Planeten; es ist möglich, dass sich nun die Kreise des Jupiter und des Mars zu einander verhalten, wie die dem Quadrate ein- und umbeschriebenen Kreise; die Mars- und Erdbahn ferner wie die Kreise des regulären Fünfecks u. s. w. Nachdem auch dieser

Versuch fehlgeschlagen war, hatte er also vergeblich in den Verhältnissen von Zahlen, Linien und Flächen das Gesetz der Entfernungen aufzufinden versucht. Aber warum Flächen? frug er sich weiter. Muss der Himmelsraum, der von Körpern durchlaufen wird, nicht nach den Verhältnissen von Körpern gemessen, also statt durch die Verhältnisse regelmässiger Figuren durch die regelmässigen Körper bestimmt gedacht werden? Und durch diese wird dann zugleich auch die Anzahl der Planeten begründet; denn es gibt 5 regelmässige Körper und 5 Zwischenräume zwischen den 6 Planeten. Die Vertheilung der Körper auf die Zwischenräume macht er nun so. Die grösste Entfernung ist zwischen Mars und Jupiter, dazwischen muss die regelmässige Pyramide gesetzt werden, bei der das Verhältniss des Radius der ein- und umbeschriebenen Kugel am grössten ist; die geringsten Entfernungen sind zwischen Venus und Erde, Erde und Mars; dazwischen gehören diejenigen regelmässigen Körper, bei denen das Verhältniss jener Kugelradien am kleinsten, das Ikosaeder und Dodekaeder; zwischen Jupiter und Saturn, deren Zwischenraum der zweitgrösste ist, ist der Cubus zu setzen, bei dem jenes Verhältniss mit dem des Octaeders das zweitgrösste ist und der sich zur Umfassung besonders eignet; für den Zwischenraum zwischen Venus und Merkur bleibt also das Octaeder übrig. Die Construction dachte er sich auf folgende Weise: Betrachtet man den Kreis der Erde als den grössten Kreis einer Kugel und legt um diese Kugel ein Dodekaeder und um dieses wiederum eine Kugel, so ist die Marsbahn ein grösster Kreis dieser Kugel. Um diese Kugel construirt man ein Tetraeder, und um dieses eine andere Kugel, so ist die Jupiterbahn ein grösster Kreis derselben. Auf dieselbe Weise ist die Saturnbahn ein grösster Kreis der Kugel, die dem um die Jupiterbahn gelegten Cubus umschrieben ist.

Dann betrachte man die Erdbahn wieder als den grössten Kreis einer Kugel und beschreibe in diese ein Ikosaeder, und in dies Ikosaeder auch eine Kugel, so ist die Bahn der Venus ein grösster Kreis dieser einbeschriebenen Kugel; die Bahn der Venus umfasst ebenso ein Octaeder, in dem die Bahn des Merkur einbeschrieben ist. Wie verhielt sich nun diese

Speculation zu den wirklichen Entfernungen? Nimmt man den Radius der umschriebenen Kugel jedesmal = 1000, so berechnet sich der der einbeschriebenen

für den Cubus nahezu auf 577
„ das Tetraeder „ „ 333
„ das Dodekaeder „ „ 794
„ das Ikosaeder „ „ 750
„ das Octaeder „ „ 577.

Es müsste also die Entfernung des Saturn von der Sonne zu der des Jupiter sich wie 1000 : 577, die des Jupiter zu der des Mars wie 1000 : 333, die des Mars zu der der Erde wie 1000 : 794 u. s. w. verhalten. Nach Kopernikus war nun das Verhältniss der Entfernung so, dass die vorhergehende zur folgenden sich allemal verhält, wie 1000 zu der verzeichneten Zahl.

Saturn . . . 1000
Jupiter . . . 635
Mars 333
Erde 757
Venus . . . 794
Merkur . . . 723.

Die Kopernikanischen Entfernungen weichen also mit Ausnahme des Merkur nicht sehr weit von den nach der Speculation berechneten ab, und wegen des Merkur wusste er sich damit zu beruhigen, dass derselbe überhaupt besondere Eigenthümlichkeiten hat, z. B. eine grosse Excentricität, und es herrschte damals die Ansicht, dass er bald einen grösseren, bald einen kleineren Kreis beschreibe. Diese ungefähre Uebereinstimmung der Kopernikanischen Entfernungen mit den geometrisch-architectonischen Verhältnissen war Kepler ein Zeichen ebenso für die Richtigkeit der Kopernikanischen Weltordnung als dafür, dass er sich auf dem Wege befand, die Frage nach dem Grunde der Anzahl und der Entfernungen der Planeten zu beantworten.

Die Harmonie des Planetensystems.

Aber die Uebereinstimmung war doch eben nur eine ungefähre, und eine genauere Berechnung der Entfernungen

nach der Methode, wie er die Entfernung des Mars gefunden, machte die Unterschiede zwischen den Werthen der Speculation und der Beobachtung noch grösser. Er suchte desshalb nach dem Grunde dieser Abweichungen, nach einem Princip, dem zu Liebe die architectonischen Verhältnisse ihre vollständige Verwirklichung aufgeben mussten, und dies Princip, das die Vollkommenheit der ruhenden Form beinträchtigt, fand er endlich in der Bewegung. Was aber für die Ruhe die Architectonik, ist für die Bewegung die Musik oder die Harmonie im ursprünglichen Sinne der Alten. So lebte denn der alte Pythagoreische Gedanke, der auch Plato's und Ptolemäus kosmische Anschauung wesentlich bestimmte, als die Speculation eines tiefen deutschen Geistes wieder auf. Kepler hat die Harmonik gründlich und mit besonderer Liebe durchforscht, aber, wie überall, blieb er bei den Gesetzen nicht stehn, sondern suchte bis zum eigentlichen Grunde derselben fortzugehn. Diesen Grund fand er in Folgendem.

Euklid nennt diejenigen Linien im Kreise erkennbar (*γνώριμοι*, lateinisch scibiles), die mit Hülfe des radius in der ersten oder zweiten Potenz ausgedrückt werden können. Zu diesen Linien gehören ausser dem Radius selbst und dem Durchmesser die Seiten der construirbaren regulären Polygone, des regelmässigen Dreiecks, Vierecks, Fünfecks und der mit verdoppelter Seitenanzahl, und des Fünfzehnecks. Es sind dies die der damaligen mathematischen Bildung commensurabelen Linien. Diese Linien nun schneiden von der Peripherie des Kreises Theile ab, die sowohl mit der ganzen Peripherie als unter sich harmonische Verhältnisse bilden. Zu beachten ist hierbei zugleich, dass die Verdoppelung einer Verhältnisszahl, d. h. also die Hinzufügung eines Octaven-Intervalls, nur die Tonlage, nicht das harmonische Verhältniss selbst ändert. Hiernach sind die harmonischen Verhältnisse folgende: 1 : 2, 1 : 3, 1 : 5; woraus durch Verdoppelung sich ableiten 1 : 4, 1 : 6, 1 : 8, 1 : 10 u. s. w. und durch Combination: 2 : 3, 3 : 4, 4 : 5, 3 : 5, 5 : 8; d. h. Octav, Quinte, Quarte, grosse und kleine Terz, grosse und kleine Sexte. Aus diesen ursprünglichen consonirenden Intervallen leiten sich die concinnen ab, die zur Ueberleitung aus dem einen in das andere Inter-

vall dienen. Das Verhältniss von Quinte zu Quarte ($^2/_3 : {}^3/_4$) ist = 8 : 9, das Intervall des ganzen Tons; das zwischen Quarte und grosser Terz ($^3/_4 : {}^4/_5$) = 15 : 16 oder der halbe Ton, das zwischen grosser und kleiner Terz und zwischen grosser und kleiner Sexte ($^4/_5 : {}^5/_6$ und $^3/_5 : {}^5/_8$) = 24 : 25, oder die Diesis; das Verhältniss zwischen Quinte und Sexte ($^2/_3 : {}^3/_5$) = 9 : 10, ein Intervall, das Kepler den kleinen ganzen Ton nennt, wesshalb er dem Intervall 8 : 9 den Namen des grossen ganzen Tons beilegt. Die Intervalle wiederum, die zwischen den concinnen Intervallen liegen, sind das zwischen dem grossen und kleinen ganzen Ton = 80 : 81, das Komma; das zwischen dem grossen ganzen Ton und dem halben Ton = 128 : 135, welches er die grosse Diesis nennt; das Intervall zwischen Komma und Halbton = $^{243}/_{256}$, das Platonische Lemma. Will man nun diese harmonischen Verhältnisse auf Eine gerade Saite übertragen, so theile man sie in 120 Theile, dem gemeinsamen Nenner aller consonirenden Verhältnisse, alsdann kommen auf

das Intervall der Octave	$^1/_2$	60
auf die grosse Sexte . .	$^3/_5$	72
„ „ kleine Sexte . .	$^5/_8$	75
„ „ Quinte	$^2/_3$	80
„ „ Quarte	$^3/_4$	90
„ „ grosse Terz . .	$^4/_5$	96
„ „ kleine Terz . . .	$^5/_6$	100
„ „ Grundton . . .	1	120

Schiebt man zwischen diese consonirenden Intervalle die concinnen ein, so bekommt man die Tonscala. Die Octave (60 : 120) besteht aus den Verhältnissen 60 : 90 oder $^2/_3$ und 90 : 120 oder $^3/_4$, also aus Quinte und Quarte; zwischen beiden ($^2/_3 : {}^3/_4$) liegt ein grosser ganzer Ton = $^8/_9$. Die Quarte, das Verhältniss 72 : 96 oder 75 : 100 besteht aus den concinnen Intervallen 72 : 80, 80 : 90, 90 : 96, d. h. 9 : 10, 8 : 9, 15 : 16 oder einem kleinen ganzen Ton, einem grossen ganzen und einem Halbton, also aus drei concinnen Intervallen (oder 75 : 80, 80 : 90, 90 : 100, ebenfalls einem Halbton, einem grossen ganzen und einem kleinen ganzen Ton,

nur in umgekehrter Reihenfolge). Die Quinte besteht also aus 2 grossen ganzen Tönen, einem kleinen ganzen und einen Halbton, also 4 concinnen Intervallen; die Octave hat also 7 concinne Intervalle und 8 Töne. Zwischen Octave und grosser Sexte (60 : 72) liegen 2 concinne Intervalle 60 : 64, 64 : 72, d. h. 15 : 16 und 8 : 9, ein Halbton und ein grosser ganzer Ton; zwischen Octave und kleiner Sexte (60 : 75) liegt ausserdem noch das Intervall 72 : 75 oder 24 : 25, die kleine Diesis. Dieselben Intervalle liegen zwischen dem Grundton und der kleinen oder grossen Terz, nur lässt sich zwischen dem Grundton 120 und der kleinen Terz 100 kein concinnes Intervall im Verhältnisse von ganzen Zahlen einschieben. Geht man also durch die grosse Terz und die grosse Sexte (vom Grundton zur Octave) d. h. also durch die consonirenden Intervalle 120 : 96 : 72 : 60 oder 1, $^4/_5$, $^3/_4$, $^5/_6$ und den dazwischen liegenden concinnen, so ist das die Durtonart; geht man aber durch die kleine Terz und kleine Sexte, vom Grundton zur Octave, also durch die consonirenden Intervalle 120 : 100 : 75 : 60 oder 1, $^5/_6$, $^3/_4$, $^4/_5$ und die dazwischen liegenden concinnen, die ebenfalls denselben Werth haben wie die der Durscala, nur die umgekehrte Ordnung, so ist das die Molltonart. Jene entsteht durch Zerlegung der Saite in Theile, bei denen die 3, diese durch Zerlegung in solche, bei denen die 5 als Factor vorherrscht.

Die Darstellung dieser harmonischen Verhältnisse in den Tönen ist aber nur die eine Form ihrer Erscheinung und die Wahrnehmung derselben durch das Ohr nur die eine Art lihrer Vermittelung an unsere Seele; auch durch das Auge können sie einer Seele erscheinen, und diese Erscheinungsform derselben ist eben die in der planetarischen Bewegung. — Aber in welchen Momenten dieser Bewegung werden sie ausgedrückt? Kepler versuchte es zuerst mit den mittleren täglichen Bewegungen, in denen aber keine harmonischen Verhältnisse zu Tage treten; zweitens mit den Entfernungen der Aphelien und Perihelien, deren Verhältnisse den harmonischen sich schon näherten, drittens mit den wirklichen Bogen, die die Planeten in den Aphelien und Perihelien täglich durchlaufen. Die Rechnung fiel aber in keinem Falle

günstig genug aus. Da bedachte er, dass die harmonischen Verhältnisse eben nur in dem Momente des Werdens, nicht des Seins sich ausdrücken und doch auch für irgend eine Seele erscheinen müssten, die sie instinctiv auffasste und empfände; dies muss aber die Seele der Sonne sein, der allein die Bewegungen in ihrer unmittelbaren Erscheinung sich darbieten; und da wird die Harmonie sich in den bedeutendsten Momenten der der Seele erscheinenden Bewegung darstellen, d. h. in den scheinbaren täglichen Bewegungen der Aphelien und Perihelien. Diese scheinbaren Bewegungen sind im geraden Verhältnisse abhängig von den wirklichen, also im umgekehrten von den Entfernungen, und da die wirklichen nun auch noch im umgekehrten Verhältnisse der Entfernungen erscheinen, so stehen also die scheinbaren im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernungen; d. h. nur für kleine Excentricitäten; bei grossen (wie beim Merkur) muss in den mittleren Längen noch der schiefe Winkel mit berücksichtigt werden, unter dem die Lichtstrahlen einfallen. Im Allgemeinen verhalten sich also die scheinbaren täglichen Bewegungen des Apheliums und Periheliums zu derjenigen in der mittleren Entfernung (m), die als Einheit genommen wird, wie das Quadrat der mittleren Entfernung (d^2) zu dem Quadrate jener Entfernungen (r^2). Die Formel dafür ist also $m \times \frac{d^2}{r^2}$. Z. B. für den Saturn, dessen periodische Zeit = 30 Jahre, ist die mittlere tägliche Bewegung = $\frac{360^0}{30 \times 365}$, die mittlere Entfernung ist = 9510, die des Apheliums = 10052 (im Masse der Erde = 1000); der scheinbare Bogen also, den er in Einem Tage im Aphelium durchläuft, ist = $\frac{360^0}{30 \times 365} \times \frac{9510^2}{10052^2} = 1' 46''$ mit hinreichender Genauigkeit. Berechnet man auf diese Weise die scheinbaren täglichen Bewegungen aller Aphelien und Perihelien, so bekommt man folgende Tafel:

Saturn:	Aphelium	$1' 46''$ (a)	zwischen	$1' 48''$	ist das Verh. = $4/5$
	Perihelium	$2' 15''$ (b)	und	$2' 15''$	= d. grossen Terz.

Jupiter:	Aphelium	4′ 30″ (*c*)	zwischen 4′ 35″	ist dasselbe = $^5/_6$ =
	Perihelium	5′ 31″ (*d*)	und 5′ 30″	der kleien Terz.
Mars:	Aphelium	26′ 14″ (*e*)	zwischen 25′ 21″	ist dasselbe = $^2/_3$
	Perihelium	38′ 1″ (*f*)	und 38′ 1″	= der Quinte.
Erde:	Aphelium	57′ 3″ (*g*)	zwischen 57′ 15″	ist dasselbe = $^{15}/_{16}$
	Perihelium	61′ 18″ (*h*)	und 61′ 4″	= dem Halbton.
Venus:	Aphelium	94′ 15″ (*i*)	zwischen 94′ 0″	ist dasselbe = $^{24}/_{25}$
	Perihelium	97′ 37″ (*k*)	und 97′ 55″	= der Diesis.
Merkur:	Aphelium	164′ 0″ (*l*)	zwischen 160′	ist dasselbe = $^5/_{12}$ = $^6/_{12}$ u. $^5/_6$ = der Oct. + der kl. Terz.
	Perihelium	384′ 0″ (*m*)	und 384′	

(Bei diesem ist die starke Excentricität mit berücksichtigt.)

Die Verhältnisse der scheinbaren Bewegungen in den Aphelien und Perihelien derselben Planeten geben also ziemlich genau harmonische Verhältnisse wieder; noch genauere aber die Verhältnisse dieser Bewegungen bei verschiedenen Planeten. Denn bezeichnen wir die Aphelien und Perihelien mit den daneben gesetzten Buchstaben, so

ist $\frac{a}{d}$ das Verhältniss der aphelischen Bewegung des Saturn zu der perihelischen des Jupiter nahezu = $^1/_3$ = Octav + Quinte.

So $\frac{b}{c} = {}^1/_2$ = Octav.

$\frac{c}{f} = {}^1/_8$ = 3 Octaven.

$\frac{d}{e} = {}^5/_{24}$ = 2 Octaven und kleiner Terz.

$\frac{e}{h} = {}^5/_{12}$ = Octav und kleiner Terz.

$\frac{f}{g} = {}^2/_3$ = Quinte.

$\frac{g}{k} = {}^3/_5$ = grosser Sexte.

$\frac{k}{i} = {}^5/_8$ = kleiner Sexte.

$\frac{i}{m} = {}^1/_4$ = 2 Octaven.

$\frac{k}{l} = {}^3/_5$ = grosser Sexte.

Um nun diese Verhältnisse von der Tonlage unabhängig zu machen und auf die Intervalle innerhalb Einer Octave zurückzuführen, muss man die übrigen Zahlen mit Ausnahme der kleinsten des Saturn so lange fortwährend halbiren, bis sie mit jenen kleinsten Verhältnissen innerhalb einer Octave eingeschlossen werden können. Dadurch ergeben sich folgende reducirte Zahlen:

Saturn:	Aphelium	1′ 46″.	
	Perihelium	2′ 15″.	
Jupiter:	Aphelium	2′ 15″	
	Perihelium	2′ 45″	(reducirt durch 2).
Mars:	Aphelium	3′ 17″	
	Perihelium	4′ 45″	(reducirt durch 2^3).
Erde:	Aphelium	1′ 47″	
	Perihelium	1′ 55″	(reducirt durch 2^5).
Venus:	Aphelium	2′ 58″	
	Perihelium	3′ 3″	(reducirt durch 2^5).
Merkur:	Aphelium	2′ 34″	
	Perihelium	3′	(reducirt durch 2^6).

Nimmt man hier das Aphelium oder vielmehr die aphelische tägliche Bewegung des Saturn als Grundton = G, so ist das Aphelium (um es so kurz zu bezeichnen) der Erde derselbe Ton, das Perihelium des Saturn (das sich zu dessen Aphelium verhält wie 135 : 1106 = 135 : 108 nahezu = 4 : 5) = der grossen Terz h; derselbe Ton ist das Aphelium des Jupiter; das Perihelium des Mars ist = der Quarte c; das Perihelium des Jupiter nahezu = der Quinte d; das Aphelium der Venus ebenso die grosse Sexte e; und derselbe Ton das Perihelium des Merkur; zwischen dem Aphelium der Venus und dem des Mars ist beinahe das Verhältniss $^8/_9$, also das Intervall eines grossen ganzen Tons, so dass das Aphelium des Mars fis sein würde.

Es ergibt sich also ein Durtonleiter: g, h, c, d, e, fis, g, der nur der Ton a fehlt, der aber auch nur in einem concinnen, nicht in einem consonirenden Verhältnisse zu dem Grundton g steht. Aber es sind hierbei unberücksichtigt gelassen das Perihelium der Venus, das Perihelium der Erde

und das Aphelium des Merkur; diese finden aber ihre Tonstelle, wenn man nicht vom Aphelium, sondern vom Perihelium des Saturn als Grundton ausgeht; alsdann ergibt sich nämlich eine Mollscala; das Aphelium des Merkur wird dann a, das Perihelium des Jupiter b, das Perihelium der Venus und des Merkur c, das Aphelium des Mars d, das Aphelium der Erde dis, das Perihelium der Erde e, das Aphelium des Jupiter g. Es ergibt sich danach die Molltonleiter g a b c d es g; bei der das f fehlt, wie oben das a. Dass das f aber fehlt, ist nicht zu verwundern, da e zu g in dem Verhältnisse von 120 : 100 steht, wozwischen kein concinnes Verhältniss in ganzen Zahlen eingeschoben werden kann.

In den Verhältnissen also der aphelischen und perihelischen täglichen Bewegungen der verschiedenen Planeten, wie sie dem Auge auf der Sonne erscheinen, drücken sich die Scalen der 2 Tonarten, Dur und Moll, aus: in den Verhältnissen dieser Bewegungen aber bei denselben Planeten, sahen wir oben, sind mehr verschiedene Tonmodulationen ausgedrückt; der Saturn geht vom Grundton bis zur grossen Terz und wieder zurück, der Jupiter bis zur kleinen Terz; der Mars singt eine Quinte ab, die Erde einen Halbton, die Venus immer fast denselben Ton (nur eine Diesis), der Merkur hat die umfangreichste Stimme, er singt eine Octave mit einer kleinen Terz. Und schliesslich weiss Kepler ein vollständiges Concert zusammenzubringen, bei dem Saturn und Jupiter den Bass, der Mars den Tenor, die Erde und die Venus den Alt und der Merkur den Sopran singt.

Das ist die Anschauung Keplers vom Kosmos. Die Urform seines Seins bilden die fünf vollkommnen Platonischen Körper, deren Verhältnisse ursprünglich in den Entfernungen der Planeten von der Sonne ausgedrückt sind, aber dem Momente des Werdens oder der Bewegung zu Liebe sind die Entfernungen modificirt, damit sich in ihnen ausser der architectonischen Symmetrie auch die musikalische Harmonie, ausser der Schönheit der Ruhe auch die der Bewegung darstellte. Beide Formen der Schönheit haben aber denselben Grund, in den Verhältnissen und Eigenschaften der regulairen Polygone im Kreise, aus denen die regelmässigen Körper sich aufbauen

und die auch den Kreis in harmonische Zahlenverhältnisse theilen. So ist die Welt die Darstellung einer einheitlichen Idee, die nur in 2 Formen zur schönen Erscheinung gelangt. Es hat diese Anschauung allerdings nur Werth als die eines genialen Geistes, der mehr als andere eine in sich geschlossene Natur nicht eher zur Ruhe kommt, als bis er auch die Welt in einer umfassenden Einheit erkannt hat. Aber, sagt Böckh: Sollten wir trefflicher Meister schöne Gebilde nicht mit Liebe betrachten, wenn auch die Originale, nach welchen sie gearbeitet wurden, nicht getroffen sind? Ist doch der Sphären wahre Harmonie, das wahre Gesetz der Planetenentfernungen bis jetzt noch unerfunden und unerkannt. Kein Geborener hat die keusche Artemis je geschaut und nicht Einem Aktäon, sondern vielen hat sie das Haupt gehörnt. Doch bis die nackte Natur dem sterblichen Auge zu erscheinen nicht erröthet, warum nicht wolltest Du das Bild, abgespiegelt in göttlicher Männer Geist, mit Lust und Genuss beschauen?“ Aber wenn auch Kepler nicht der Sphären wahre Harmonie gefunden und seine Harmonie der Welt nur ein Bild bleibt, abgespiegelt in seinem Geist, die Artemis hat ihn doch zu ihrem Liebling erkoren und aus Apollos Hain den schönsten Zweig ihm gebrochen.

Das Verhältniss der mittleren Entfernungen zu den periodischen Zeiten.

Es ist klar, dass sich ihm nun die Frage aufdrängte, in welchem Verhältnisse eigentlich das Moment des Seins oder der Ruhe zu dem des Werdens oder der Bewegung stehe und wie sie sich gegenseitig bedingen oder wol noch besser gefragt, wie sich die Urform des Seins und des Werdens in ihrer eigentlichen Gestalt zu einander verhalten. Jene aber ist die mittlere Entfernung, diese die mittlere Bewegung oder die periodische Zeit. Die periodische Zeit war das Dritte, wie wir gesehen haben, dessen Grund er von Anfang an strebte zu finden, um den Kosmos zu begreifen; jetzt führt ihn der Gang seiner Forschung zu dieser Frage zurück.

Es lag auf der Hand, dass die periodische Zeit abhängig von der Entfernung und dass je grösser diese um so

grösser auch jene ist. Aber auch das ergab sogleich die Vergleichung, dass dies Verhältniss kein einfaches ist, sondern das Verhältniss der periodischen Zeiten zu einander grösser ist als das der Entfernungen. Kepler erklärte dies sogleich dadurch, dass die periodische Zeit des entfernteren Planeten nicht allein durch den grössern Raum, den er zu durchlaufen hat, sondern auch durch die geringere Kraft der Bewegung, die mit der Entfernung von der Sonne abnimmt, vergrössert wird. Er probirte nun, ob der Unterschied der periodischen Zeiten zur Hälfte durch den grössern Raum, zur Hälfte durch die Abnahme der Kraft verursacht würde. Wollte er also hiernach aus den periodischen Zeiten von Merkur und Venus das Verhältniss ihrer mittleren Entfernungen berechnen, so war die Rechnung folgende: Die periodische Zeit der Venus ist $224^2/_3$, die des Merkur 88; der Unterschied $136^2/_3$; dieser kommt zur Hälfte auf die Abnahme der Kraft, zur Hälfte auf die Vergrösserung des orbis; der orbis der Venus verhält sich also zu dem des Merkur,

$$\text{wie } 88 + \frac{136^2/_3}{2} \text{ oder wie } 156^1/_3 : 88,$$

wie das arithmetische Mittel der periodischen Zeiten zu der einen periodischen Zeit. Das wäre also auch das Verhältniss der Radien oder mittleren Entfernungen; nimmt man die der Venus = 1000, so muss danach die des Merkur 574 sein; nach Kopernikus ist das Verhältniss 1000 : 572. Kurzum, es nähern sich alle auf diese Weise berechneten Verhältnisse den Verhältnissen, die Kopernikus für die mittleren Entfernungen aufgestellt hatte. Nach seiner späteren Ansicht, dass die Kraft im umgekehrten einfachen Verhältnisse der Entfernung abnähme, würde er die periodischen Zeiten richtiger in das Verhältniss des Quadrats der Entfernungen zu einander gesetzt haben, was er dann später auch versucht hat, wodurch sich die berechneten Verhältnisse aber von den astronomisch gefundenen wieder weiter entfernten. Nachdem er nun aus den Tychonischen Beobachtungen die Verhältnisse der mittleren Entfernungen richtiger berechnet hatte, konnte er diese Frage, deren Lösung zum Abschlusse seiner kosmischen Anschauung nothwendig war, mit sichererem Erfolge von

neuem der Rechnung unterwerfen und durch die Analyse der Zahlen zu entscheiden versuchen, wobei sich ihm endlich das Gesetz erschloss, dass die Quadrate der periodischen Zeiten sich zu einander verhalten wie die Cuben der mittlern Entfernungen.

„Sera quidem (proportio) respexit inertem
Respexit tamen et longo post tempore venit.“

Am 8 März 1618, wie er erzählt (de harmonia mundi lib. V, c. III. p. 279 Frioh) fasste er zuerst den Gedanken, ob die proportio sesquialtera das wahre Gesetz zwischen der mittleren Zeit und der mittleren Entfernung sein d. h. ob sich die Quadrate jener wie die Cuben dieser zu einander verhalten möchten. Anfangs fiel die Rechnung unglücklich aus, als er aber am 15. Mai zu derselben zurückkehrte, da bestätigte die Rechnung seine Speculation so überraschend genau, dass er Anfangs zu träumen oder sich selbst bestochen zu haben glaubte. Aber die Sache war richtig. Er hatte die grosse Wahrheit gefunden, um die er Jahrzehnte gerungen.

Schluss.

So sah Kepler die Hoffnung seiner Jugend erfüllt, und das, um was er so oft Gott gebeten, er möchte ihn den Beweis für das Kopernikanische Weltsystem finden lassen, war ihm zu Theil geworden. Er hat dieses System durch den Nachweis seiner innern Gesetzmässigkeit bewiesen, gegen das Tychonische gerettet und zur Herrschaft erhoben.

Wenn Ptolemäus Recht hat, sagt er (in den spätern Anmerkungen zum mysterium cosmographicum c. 20 n. 8), so gibt es überhaupt kein bestimmtes Verhältniss der Bewegungen, d. h. der periodischen Zeiten zu den orbes oder den mittleren Entfernungen.

Wenn Tycho de Brahe Recht hat, so gilt zwar das Gesetz, dass die Quadrate der periodischen Zeiten sich zu einander verhalten wie die Cuben der mittleren Entfernungen, aber die Planeten haben kein gemeinsames Centrum ihrer Bewegung.

Wenn endlich Aristarch Recht hat, dass die Sonne ruht und nicht nur die übrigen 5 Planeten, sondern auch die Erde um sich herum bewegt, so herrscht einerseits sowohl zwischen der Entfernung und der periodischen Zeit der Planeten ein bestimmtes Gesetz und andererseits hat die ganze planetarische Bewegung Ein Centrum und Eine Quelle.

Damit hatte Kepler eigentlich den ersten Schritt über die Alten hinaus gethan. Das heliocentrische System hatten sie auch gekannt, aber den Beweis dafür waren sie schuldig geblieben. Dadurch dass Kepler die innere Gesetzmässigkeit des heliocentrischen Systems bewiesen, ist er der Begründer der neuen Astronomie geworden und hat die Sehnsucht seiner astronomischen Zeitgenossen befriedigt nach einer Astronomie ohne Hypothesen, d. h. nach einer astronomischen Theorie, die nicht die Erscheinungen anderswoher geholten Kategorieen anpasste, um ihren Zusammenhang nothdürftig zu erklären, sondern das Wesen und das Naturgesetz der kosmischen Erscheinungen ausdrückte. Aber damit kommen wir zugleich zu einer weitern Bedeutung Keplers für die Wissenschaft und die Culturgeschichte überhaupt. Wie grosse Fortschritte in einer Wissenschaft auch sonst neue Probleme schaffen, weitere Entwickelungen hervorrufen und allgemeine Anschauungen erwecken oder begründen, so hat auch Kepler der mathematischen Wissenschaft die Aufgabe vermacht, die Continuität der natürlichen Bewegung der Rechnung zu unterwerfen, der Naturwissenschaft in dem Begriffe der Kraft ein neues fruchtbares Prinzip gegeben und durch die Art seiner Forschung der Forschung überhaupt eine ebenso fruchtbringende Methode vorgezeichnet.

Der Begriff der Continuität, der das Werden in der Natur zu seinem Inhalte hat, ist ein ebenso bedeutendes Moment für die Mathematik geworden, wie es päter durch Hegel der Begriff der Entwicklung, der das Werden im Leben des Geistes zum Inhalt hat, für die geschichtlichen Wissenschaften geworden ist. Dieser Begriff hat das wissenschaftliche Bedürfniss erweckt, die unendlich kleine Veränderung oder das Element des Werdens mathematisch auszudrücken und daraus die gewordene endliche Grösse zu berechnen, das

grosse Problem, das Leibnitz und Newton zur Erfindung der Differentialrechnung geführt hat, womit ein unermesslicher, culturgeschichtlicher Fortschritt eröffnet ist. Und nicht weniger umgestaltend ist der Begriff der Kraft geworden, der mit dem der Continuität eng zusammenhängt. Von unsichern gefühlsähnlichen Ahnungen der Kraft erfüllt hatte er die Ursache der planetarischen Bewegung in den Sonnenkörper selbst gesetzt; er erkennt, dass die Wirkung dieser Ursache mit der Entfernung von der Sonne abnimmt, und durch die Analogie mit dem Lichte erschliesst sich ihm die Vorstellung von der Fernwirkung eines Körpers auf einen andern, deren Gesetz er in der Proportionalität der Zeit und der vom Strahle der Kraft beschriebenen Fläche ausdrückt, womit er zugleich die Constanz als Wesen der kosmischen Kraft ausgesprochen hat. / Indem Kepler so die kosmische Bewegung auf eine Kraft der Materie zurückführte, begann er die Natur der seelischen Mächte zu berauben, die der Glaube des Alterthums und des Mittelalters ihr zuschrieb. Man könnte sagen, wie die Reformation im Reiche der Freiheit oder der Gnade die Vermittlung des Menschen mit Gott durch die Heiligen aufhob und den Menschen in eine unmittelbare Gemeinschaft mit Gott setzte, so hat Kepler die seelischen Zwischenmächte in der Natur aufgehoben, und die einmal geschaffene Materie nur durch die ihr von Anfang an verliehenen Kräfte bewegt werden lassen. / Und der Begriff, der hier zuerst als Ursache der auffallendsten Ortsveränderung erscheint, ist als Ursache jeder Bewegung und überhaupt jeder Erscheinung der Materie, ja als deren eigentliches Sein und Werden erkannt worden. Man ist auch wol geneigt gewesen, Kepler für den eigentlichen Entdecker der allgemeinen Schwerkraft zu halten. Dem ist aber nicht so. / Um diesen Begriff, d. h. die Einheit der kosmischen und terrestrischen Kraft der Bewegung zu erkennen, dazu fehlte ihm der Begriff der Beharrung, der nothwendig war, um die krummlinige Bewegung der Planeten auf die geradlinige des Falls zurückzuführen, und den zuerst Galilei gefunden hat. / Zwar erkannte er der Materie die Eigenschaft der Trägheit zu, aber fasste diese, wie er selbst sagt, nur als eine negative Eigenschaft, als eine Geneigtheit

zur Ruhe, nicht als ein Bestreben, immer in demselben Zustande, sei dieser Ruhe oder Bewegung, zu beharren. / Er vergleicht zwar die langsamere und raschere Bewegung des von der Sonne mehr oder weniger entfernten Planeten mit der durch die Erdschwere bedingten langsameren und schnelleren Bewegung eines längern oder kürzern Hebelarms, aber über diese Anklänge hinaus zum Bewusstsein der wesentlichen Einheit der beiden bewegenden Kräfte ist er nicht gekommen. Die beiden Kräfte, die der Sonne und die des bewegten Planeten, die er zur Veranschaulichung der planetarischen Bewegung hypostasirt, zieht er schliesslich in eine magnetische Kraft der Sonne zusammen, bei der als bewegender kosmischer Kraft er stehen bleibt. / Die Schwere war ihm nur eine terrestrische Kraft, nicht eine Kraft der Materie überhaupt, wie Apelt richtig sagt. / Kepler sah die Einheit des Kosmos noch nicht in demselben Grunde der Bewegung, sondern in der Symmetrie der Theile; er fasste denselben noch nicht sowohl als Organismus wie als Form. / Auch dadurch steht er am Schlusse der alten und am Anfang der neuen Anschauung. Gerade indem er mit dem Gedanken der Alten, der Pythagoreer und Platoniker, dass die Welt eine vollendete Form wäre, so tiefen Ernst machte, entdeckte er das neue Princip, das die Naturanschauung umgestaltete, dessen Entwickelung zugleich die immer umfassendere Herrschaft des menschlichen Geistes über die Natur begleitet, das auch auf das Geistesleben selbst bedeutende Schlaglichter geworfen und auch der Philosophie neue Gegenstände und Kategorieen erschaffen hat. / Doch wer kann die Veränderungen alle ermessen, die von einem grossen Gedanken ausgehen, oder wäre auch kühn genug, alle auf den einen ursprünglichen Ausgangspunkt zurückzuführen? Aber wir kommen bei der geschichtlichen Forschung immer auf die wunderbaren Menschen von unergründlicher Tiefe zurück, die an den Marken der Zeiten stehen und eine unermessliche Zukunft in sich tragen. /

Und wie durch seine Resultate, so steht auch Kepler durch die Methode seiner Forschung an der Spitze der neueren Naturwissenschaft. Als Baco von Verulam die Inductions-

methode für die Naturforschung forderte, hatte Kepler schon das Beispiel einer grossartigen und consequenten Induction gegeben. Denn das ist der wesentlichste Unterschied zwischen der inductiven und der scholastischen Methode, dass diese mit fertigen aus andern Disciplinen genommenen Kategorieen an die Dinge herantritt, die Induction die Dinge selbst auch um die leitenden Prinzipien fragt. Jene hatte mit Mühe die kosmischen Bewegungen auf geometrische Kategorieen zurückgeführt, Kepler gewann der Natur die Begriffe ab, die das Wesen der Bewegung wirklich ausdrücken. Die einzige Voraussetzung eigentlich, mit der er an die Forschung herangieng, war die Erkennbarkeit der kosmischen Verhältnisse, d. h. die Gesetzmässigkeit derselben. Man könnte noch hinzufügen: die Commensurabilität derselben für unsern Verstand. Denn so wunderbar die Zurückführung derselben auf die regelmässigen Polygone im Kreise erscheinen mag, so liegt derselben doch die Voraussetzung zu Grunde, dass die Grössenverhältnisse oder vielmehr die Zahlengesetze in der Natur über die Fassungskraft unseres Verstandes nicht hinausgehn. Und es ist doch auch merkwürdig, dass dieselben sich gewöhnlich so einfach und fassbar darstellen. Die Begriffe, durch die er sich bei der Forschung selbst leiten liess, hat er durch Analogie gefunden; so den der kosmischen Kraft durch die Analogie des Lichts; die Allgemeingültigkeit des punctum aequans und der Bisection und damit das Gesetz der continuirlichen Veränderung der Geschwindigkeit nach der Analogie des Mars, das Mass der richtigen heliocentrischen Entfernungen des Mars durch die Cosinuslinie der aequatio optica nach der Analogie der mittleren heliocentrischen Entfernung desselben. Die auf diese Weise gewonnenen Intuitionen hat er dann durch eine erschöpfende und genaue Boobachtung der Erscheinungen geprüft, geklärt und verbessert. Darin besteht eben die Inductionsmethode. Es gehört zu ihr erstens die Analogie, deren Wesen es ist, in dem einzelnen Falle das Gesetz und die Idee zu erkennen, und diese Gabe macht wesentlich das wissenschaftliche Genie aus, wie der schaffende Künstler umgekehrt die allgemeine Idee in dem besonderen Falle zur Anschauung bringt. Aber diese Erkenntniss hat zunächst

nur subjectiven Werth, bis sie durch die Thatsachen und Erscheinungen selbst als ihr wirkliches Wesen bewiesen und so zum objectiven Gesetz erhoben wird. Man kann mit Recht behaupten, dass Kepler es gewesen ist, der auch die Methode begründet hat, welcher die neuere Naturforschung ihre grossartigen Errungenschaften verdankt.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Anmerkungen.

1) Gruppe: Die kosmischen Systeme der Griechen. Berlin 1851, namentlich Seite 157 ff. Dagegen Boeckh, Untersuchungen über das kosmische System des Platon. Berlin 1852. V. die frühere Schrift desselben: de Platonico systemate coelestium globorum et de vera indole astronomiae Philolaicae in Boeckh's kleinen Schriften, ed. Ascherson Bd. 3 p. 266.

2) Soll der Epicycel wirklich dem Zwecke entsprechen, so muss derselbe die Grösse des Sonnenkreises haben.

3) V. Apelt: Die Reformation der Sternkunde. Jena 1852. S. 50 ff.

4) Die Ciceronianische Stelle ist Qu. Acad. IV. (oder pr. II.) 39, 123. Die Pseudo-Plutarchische placitt. philos. III, 13: *οἱ μὲν ἄλλοι μένεῳ τὴν γῆν, Φιλόλαος δὲ Πυθαγόρειος κύκλον περιφέρεσθαι περὶ τὸ πῦρ κατὰ κύκλου λοξοῦ, ὁμοιοτρόπως ἡλίῳ καὶ σελήνῃ. Ἡρακλείδης ὁ Ποντικὸς καὶ Ἔκφαντος ὁ Πυθαγόρειος κινοῦσι μὲν τὴν γῆν, οὐ μήν γε μεταβατικῶς, τροχοῦ δίκην ἐνζωνισμένην ἀπὸ δυσμῶν ἐπὶ ἀνατολὰς περὶ τὸ ἴδιον αἰτῆς κέντρον.* Die Worte *τροχοῦ δίκην ἐνζωνισμένην* sind verderbt. Man hat Verschiedenes conjicirt: *τροχοῦ δίκην ἐνζωνισμένου*, das zunächst sich darbietet, liesse sich vielleicht erklären: nach Art eines mit einem Gurte umlegten Rades, das etwa wie ein Haspel auf derselben Stelle sich um seine Achse dreht (*οὐ μεταβατικῶς*). *ἐνζωνισμένος* ist allerdings die Form eines Verbums, das nur hier vorkommt; *ἐνζώννυμι* heisst aber bei Plutarch Sull. c. 28 einen Gurt umlegen.

5) Die akronychischen oder heliocentrischen Längen sind folgende.

Zeit	helioc. Länge	Breite	mittl. Länge
1580. 18. Novbr. 1 St. 31 M.	$2^s\ 6^\circ 28' 35''$	$1^\circ\ 40'$ nördl.	$1^s 25^\circ 49' 31''$
1582. 28. Decbr. 3 „ 38 „	$3^s 16^\circ 55' 30''$	$4^\circ\ 6'$ „	$3^s\ 9^\circ 24' 55''$
1585. 30. Jan. 19 „ 14 „	$4^s 21^\circ 36' 10''$	$4^\circ\ 32\frac{1}{6}'$ „	$4^s 20^\circ\ 8' 19''$
1587. 6. März 7 „ 23 „	$5^s 25^\circ 43'\ 0''$	$3^\circ\ 41'$ „	$6^s\ 0^\circ 47' 40''$
1589. 14. April 6 „ 23 „	$7^s\ 4^\circ 23'\ 0''$	$1^\circ\ 12\frac{3}{4}'$ „	$7^s 14^\circ 18' 26''$
1591. 8. Juni 7 „ 43 „	$8^s 26^\circ 43'\ 0''$	$4^\circ\ 0'$ südlich	$9^s\ 5^\circ 43' 55''$
1593. 25. Aug. 17 „ 27 „	$11^s 12^\circ 16'\ 0''$	$6^\circ\ 2'$ „	$11^s\ 9^\circ 55'\ 4''$
1595. 31. Obtbr. 0 „ 39 „	$1^s 17^\circ 31' 40''$	$0^\circ\ 8'$ nördl.	$1^s\ 7^\circ 14'\ 9''$
1597. 13. Sptbr. 15 „ 54 „	$3^s\ 2^\circ 28'\ 0''$	$3^\circ\ 33'$ „	$2^s 23^\circ 11' 56''$
1600. 18. Jan. 14 „ 2 „	$4^s\ 8^\circ 38'\ 0''$	$4^\circ\ 30\frac{5}{6}'$ „	$4^s\ 4^\circ 35' 50''$
1602. 20. Febr. 14 „ 13 „	$5^s 12^\circ 27'\ 0''$	$4^\circ\ 10'$ „	$5^s 14^\circ 59' 39''$
1604. 28. März 16 „ 23 „	$6^s 18^\circ 37' 10''$	$2^\circ\ 16'$ „	$6^s 27^\circ\ 0' 12''$

6) Die genaue Umlaufszeit ist 686 Tage 17 St. 30 M. 41 Sec.; Kepler selbst nimmt als genauere Zeit 686 T. 23 St. an.

7) Genau beobachtet ist der Ort des Mars allerdings am 4. März 1590 Abends 7 Uhr 10 Minuten in 24° 20′ ♈, Kepler nimmt aber diesen daraus für den 5. März berechneten Ort, weil derselbe von der gäocentrischen Breite frei ist.

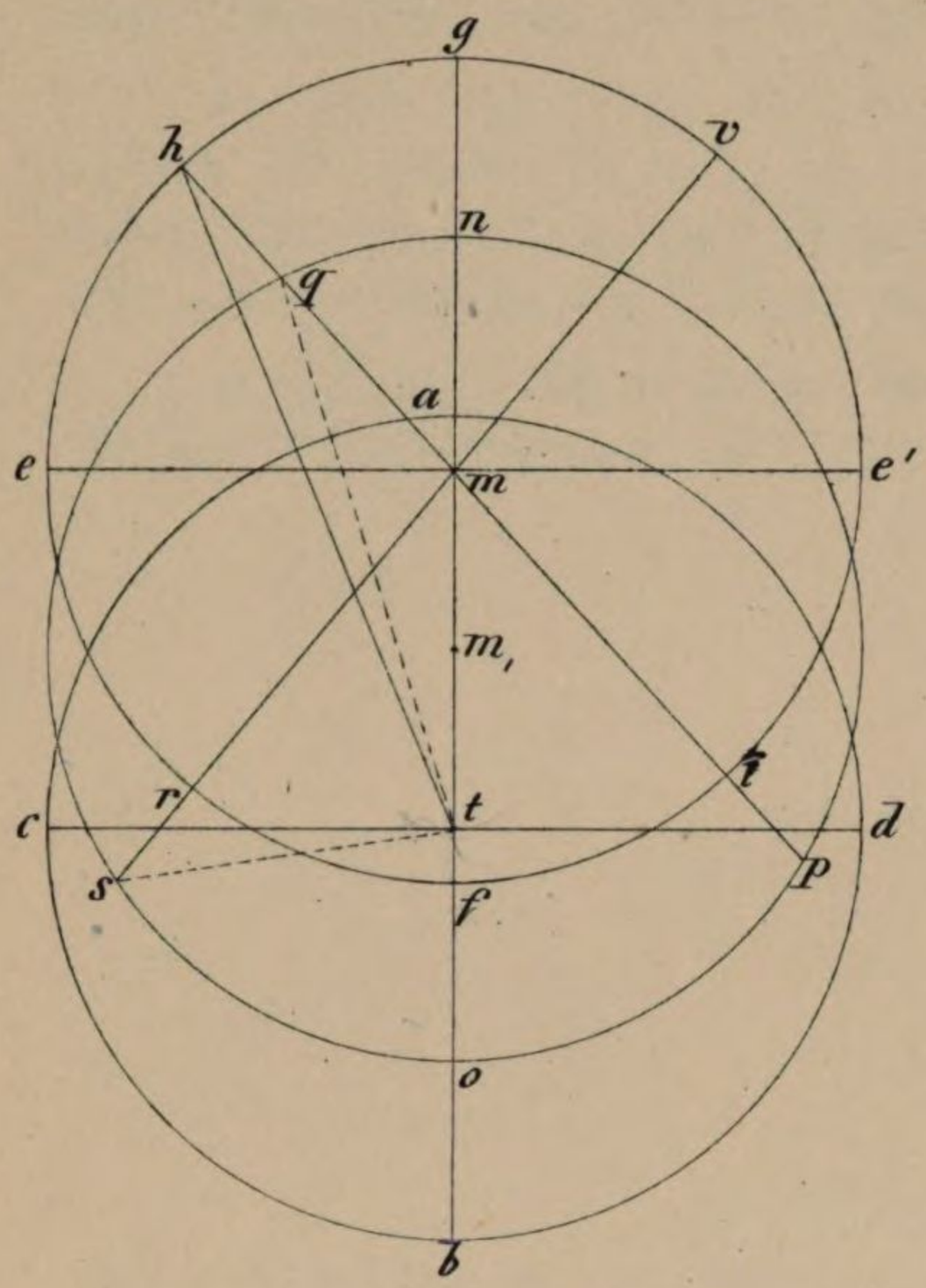
8) Apelt S. 287 ff. glaubt, dass Kepler durch einen doppelten sich paralysirenden Irrthum zu diesem Gesetze gekommen sei.

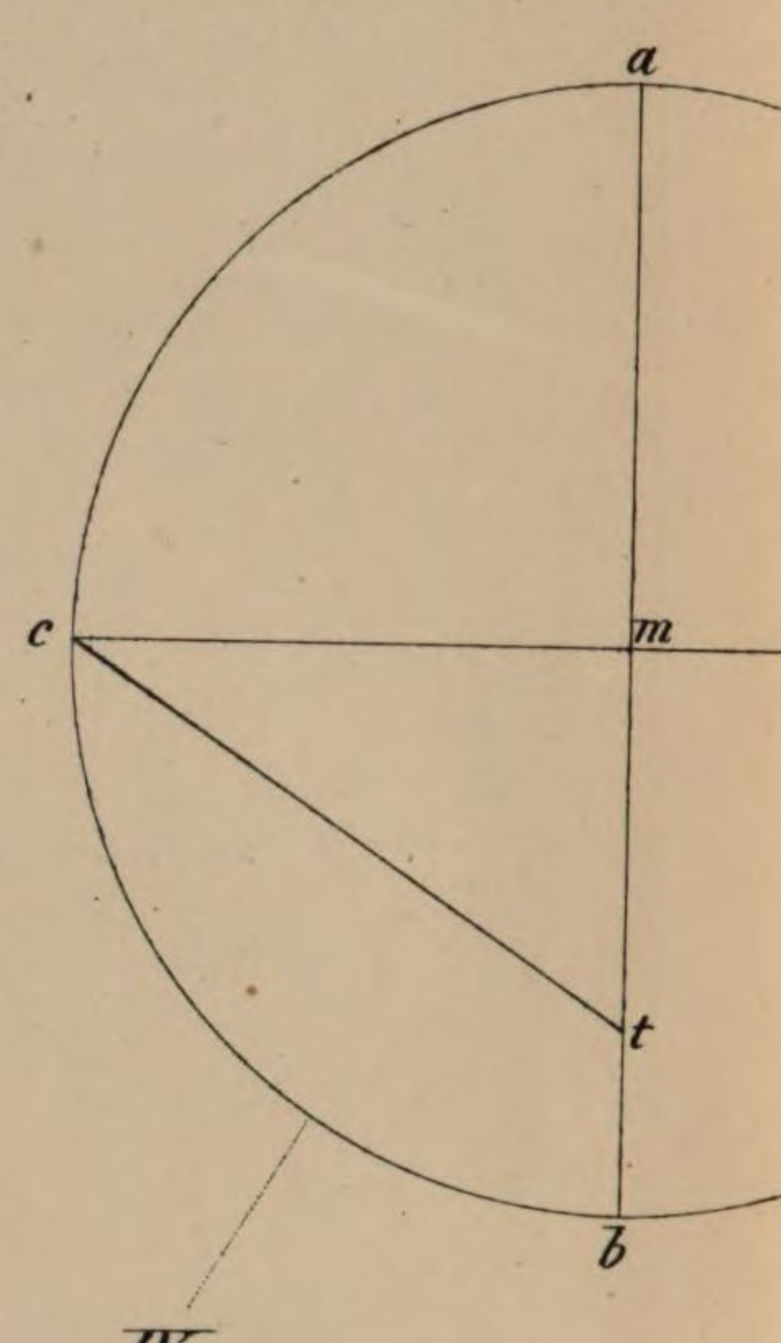
Druckfehler.

S. 8 Zeile 13 u. 12 v. u. für *gcd* lies *gef* und für *fcd* lies *fe'g*.
S. 8 - 14 v. u. l. die von *g* an beschriebenen Winkel.
S. 9 - 8 v. o. l. entfernter von da nach *f* oder *b* statt entfernter von *f* oder *b*.
S. 46 - 13 v. u. für sin 94° 30′; sin 1° 50′ lies sin 94° 30′ × sin 1° 50′.
S. 112 - 15 v. o. l. leimma für lemma.

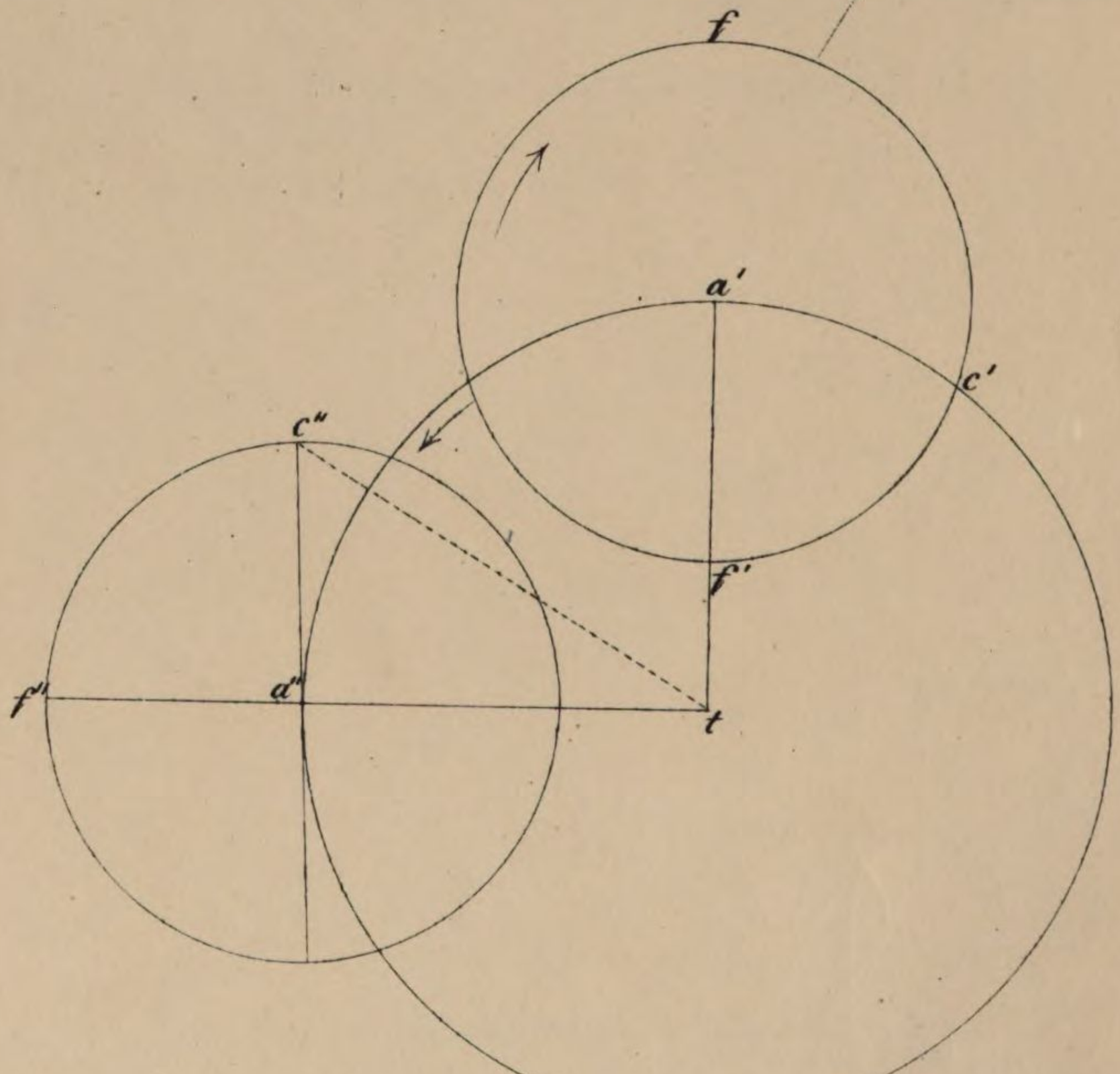
Halle, Buchdruckerei des Waisenhauses.

I.

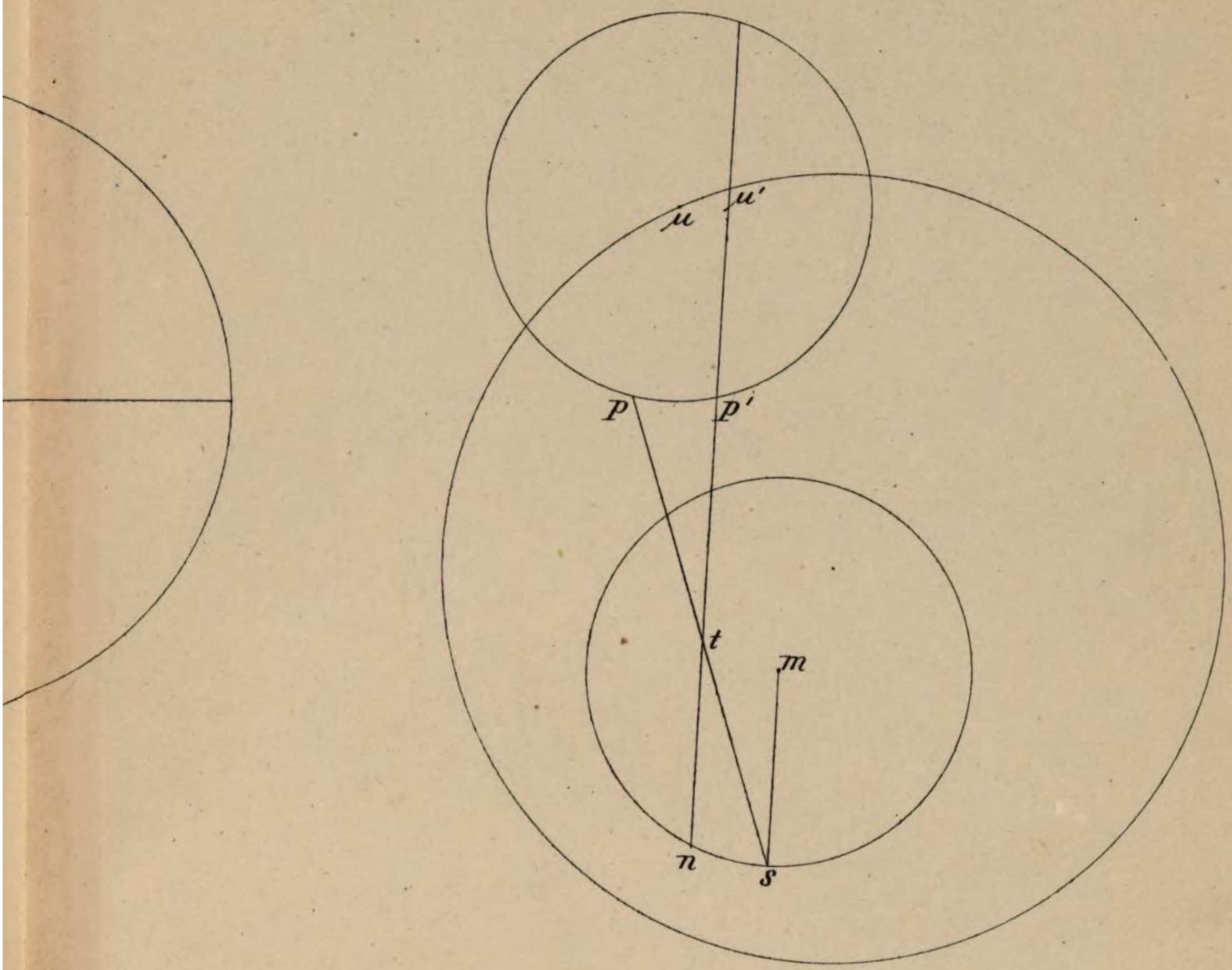




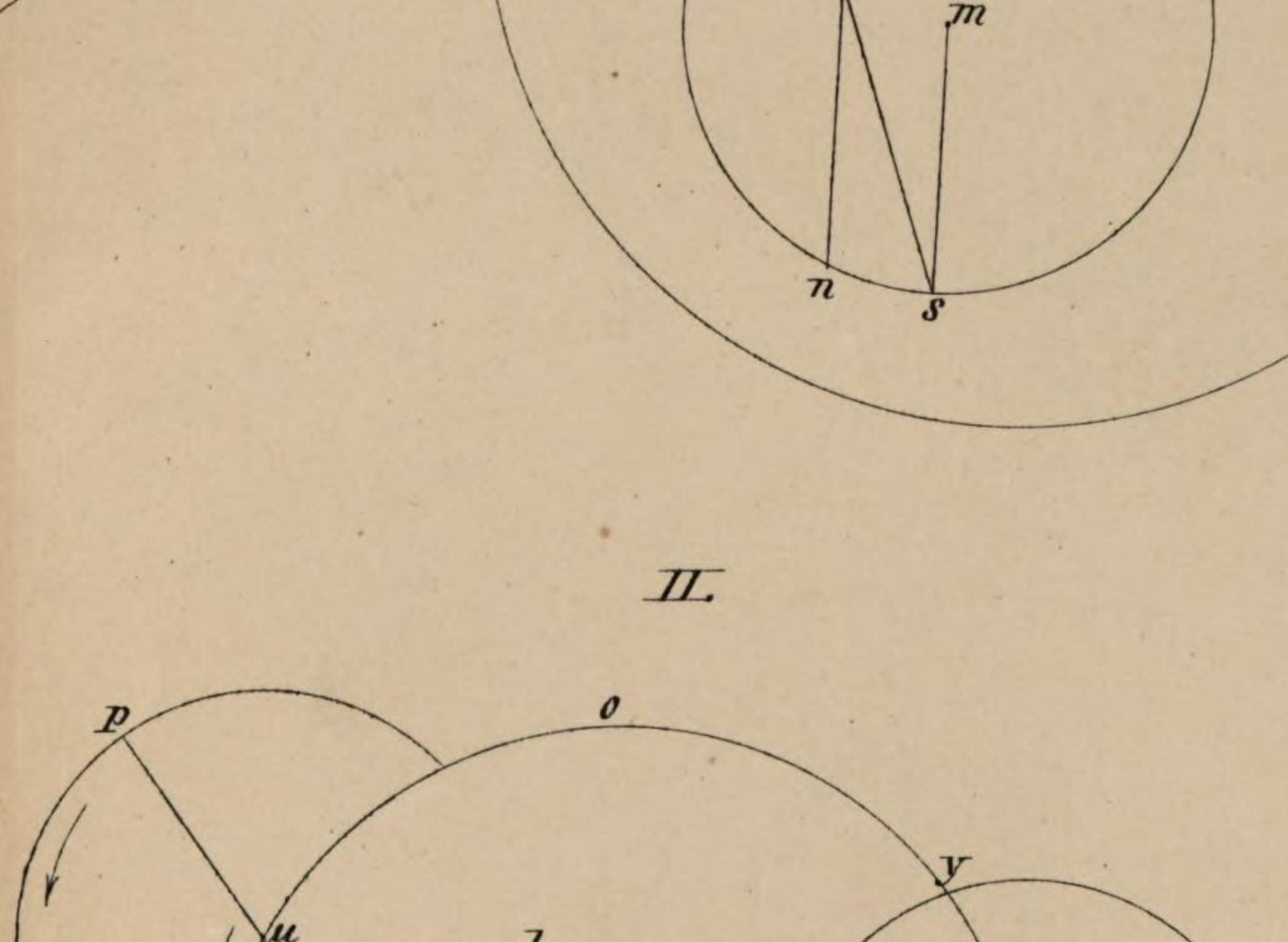
IV.



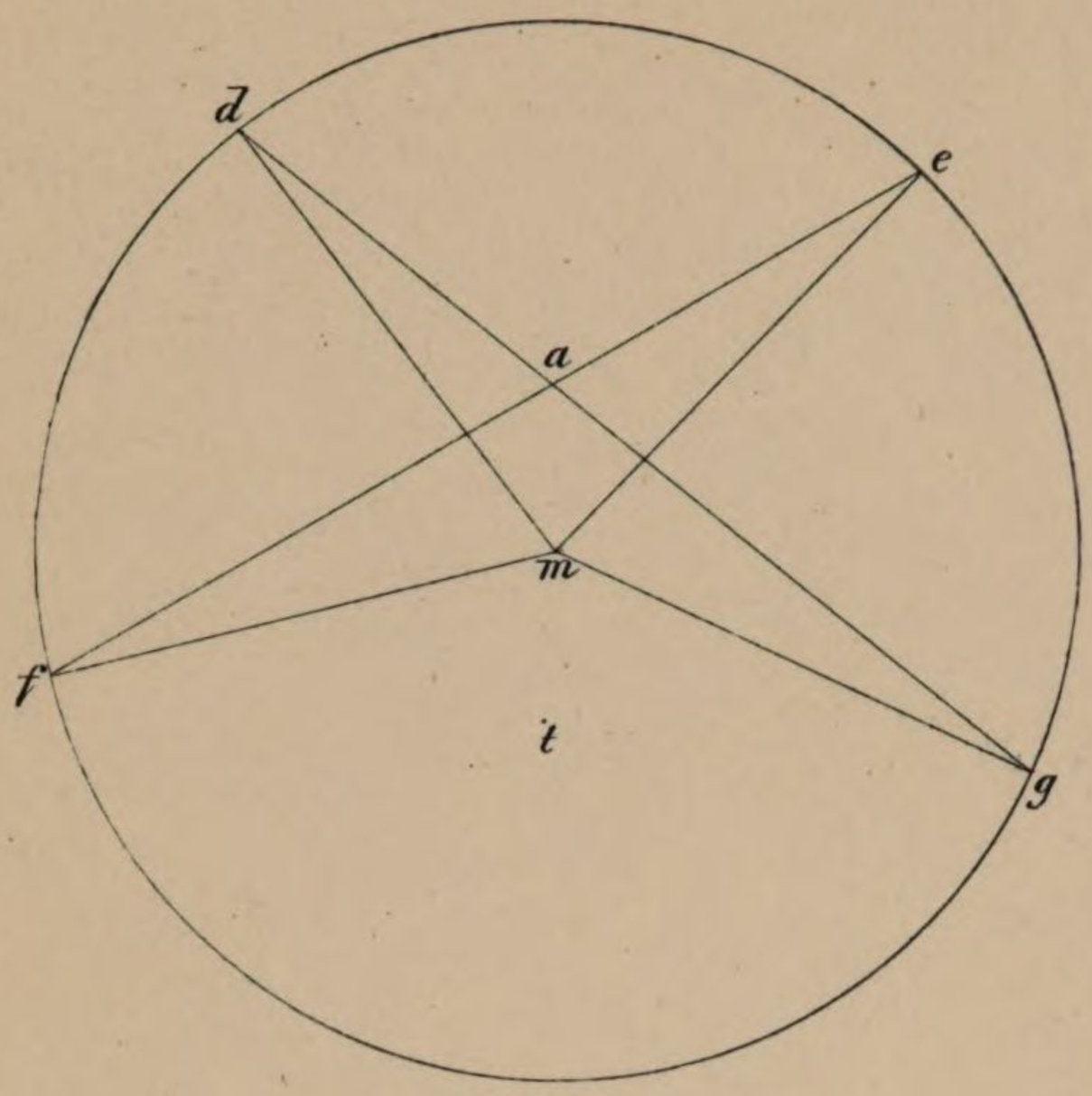
III.



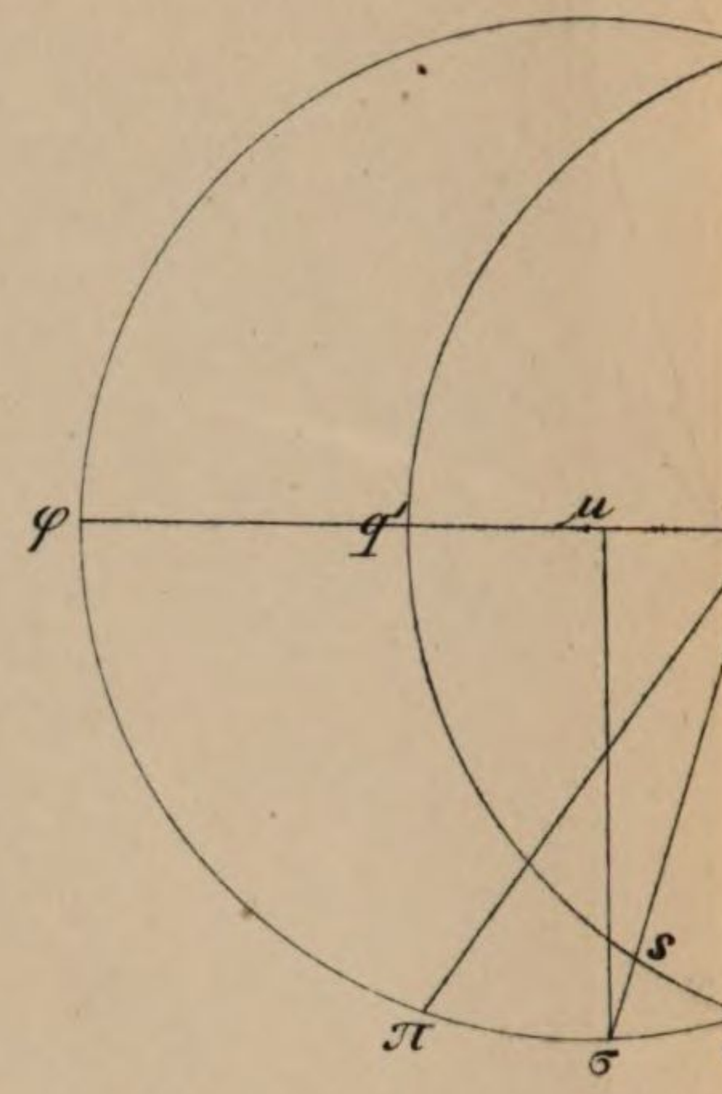
II.



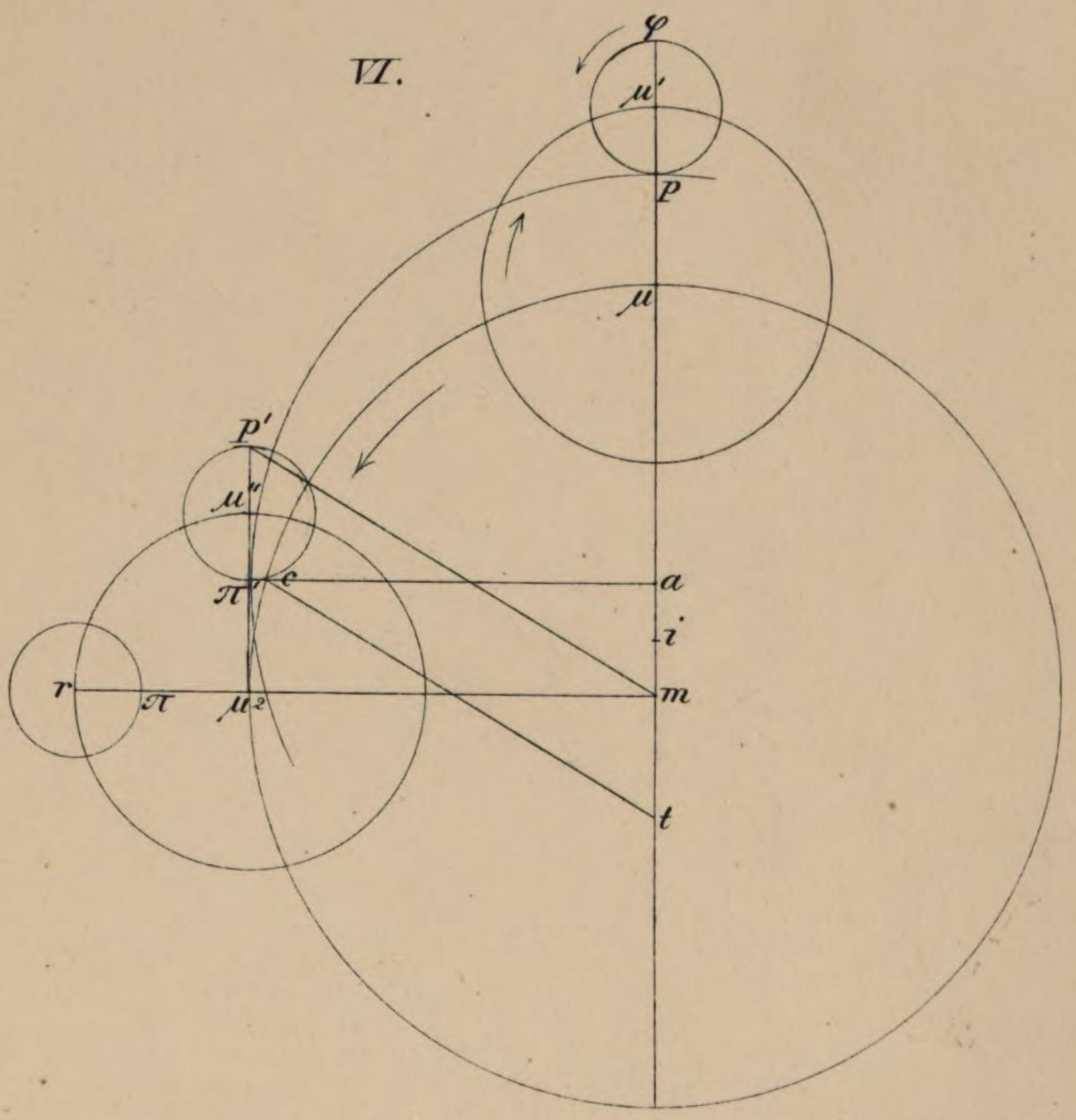
V.

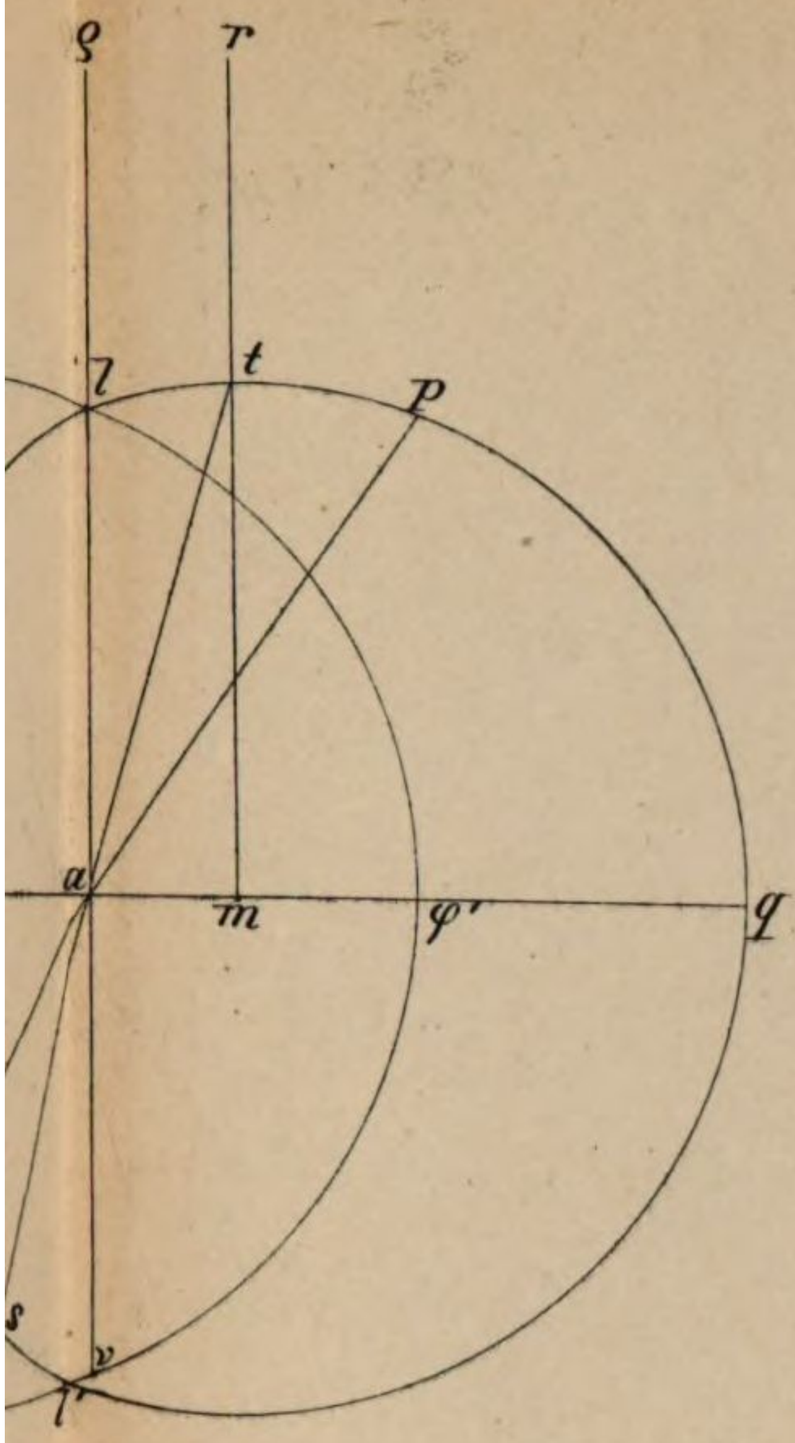


VIII.

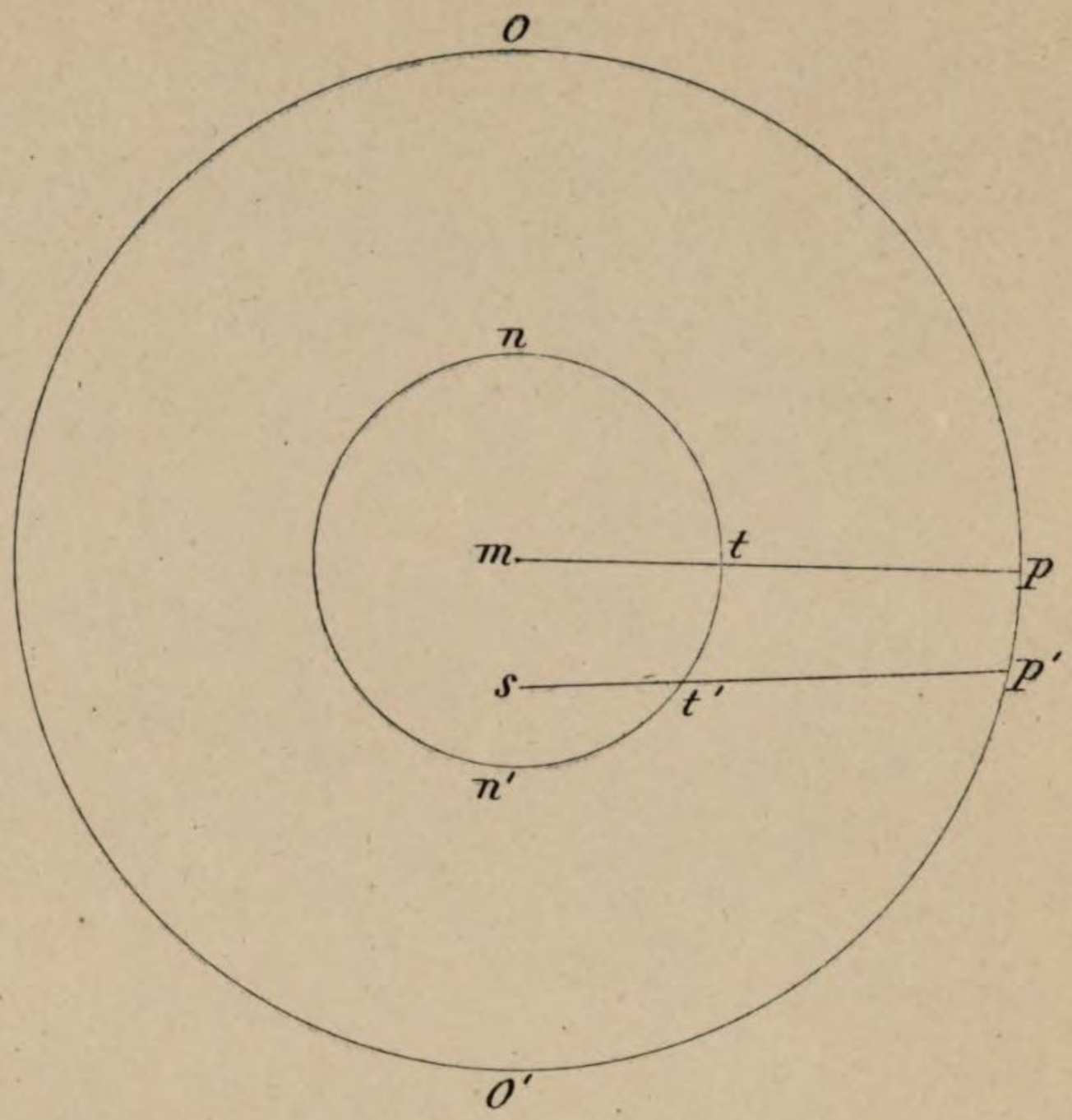


VI.

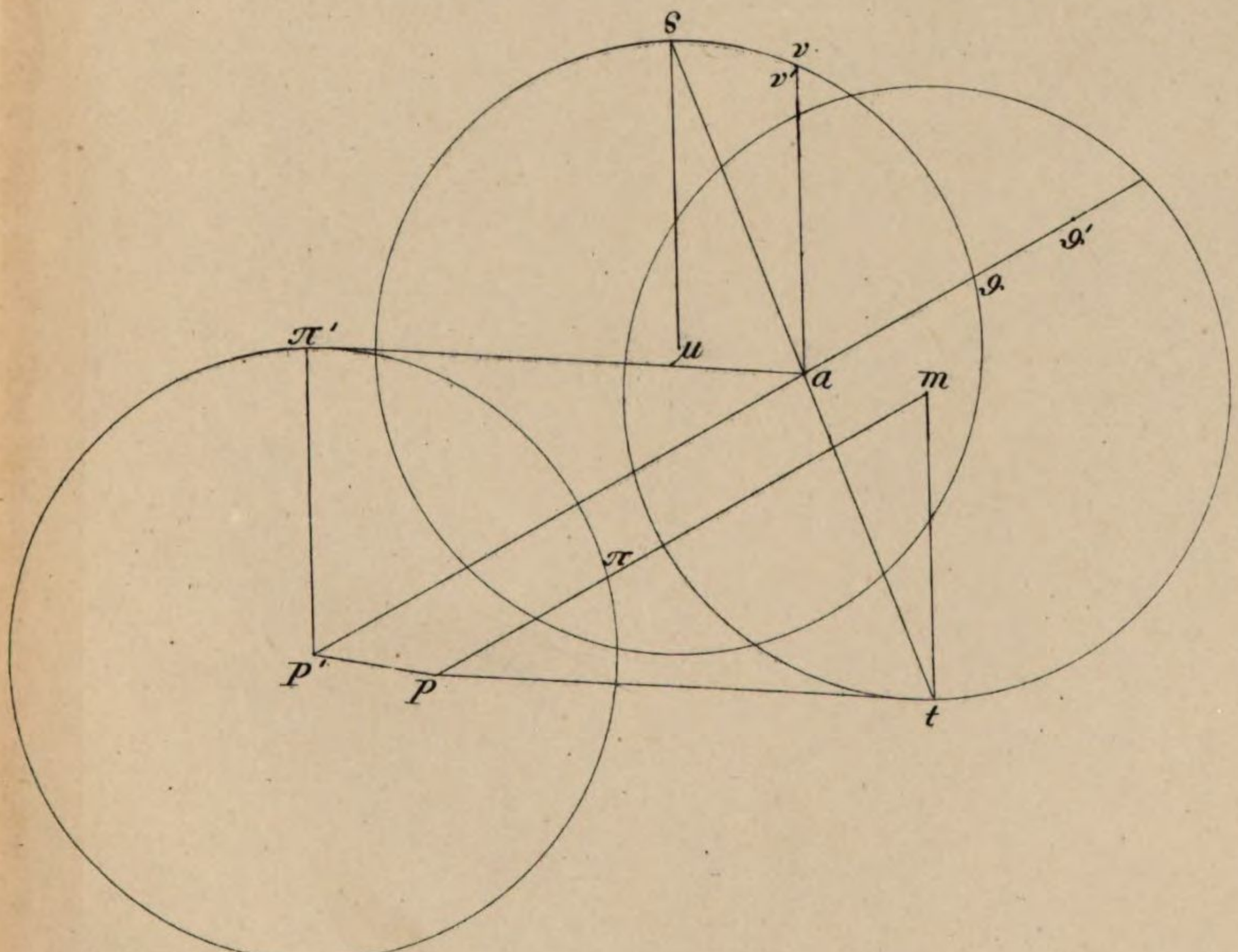




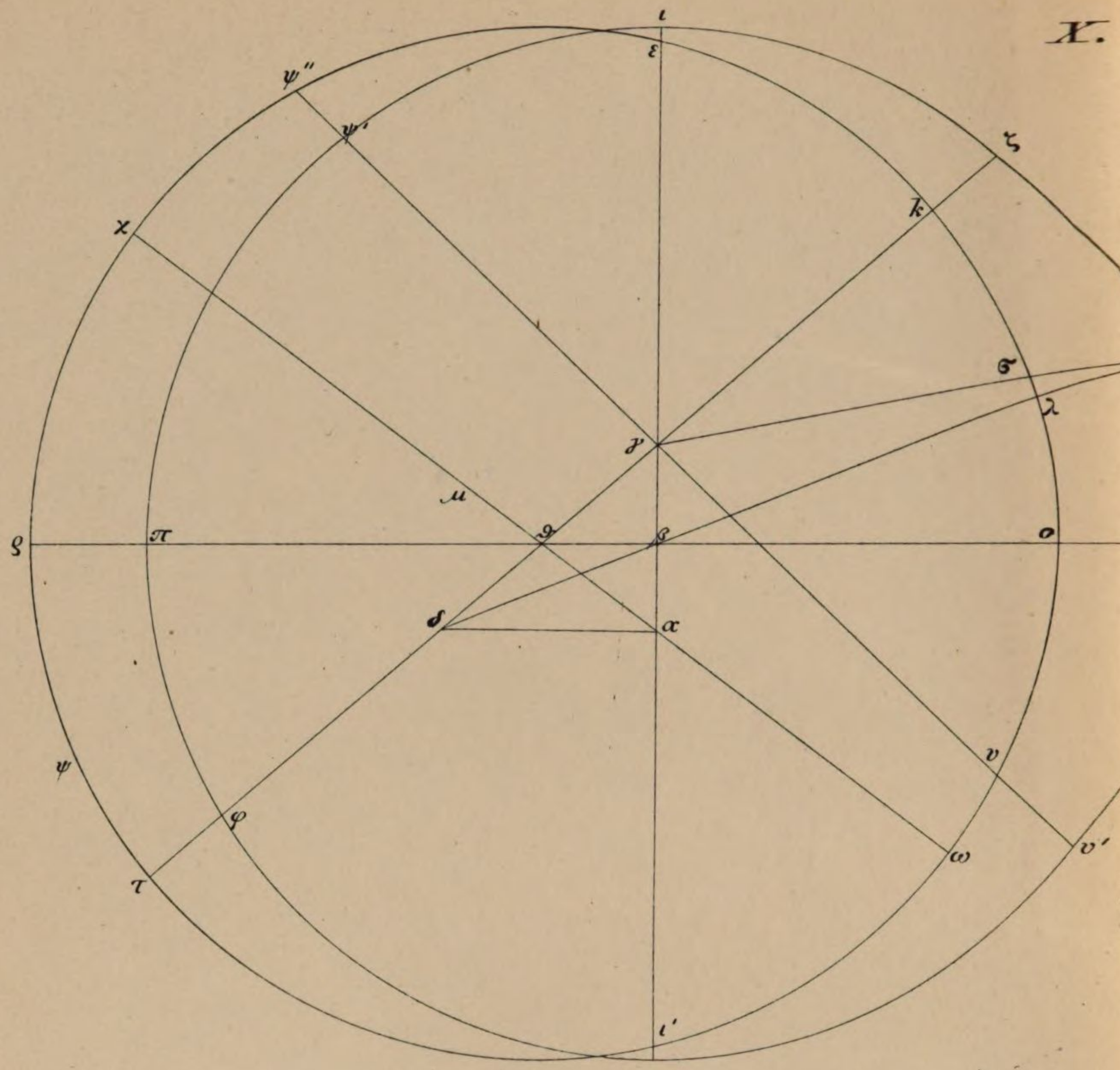
VII.



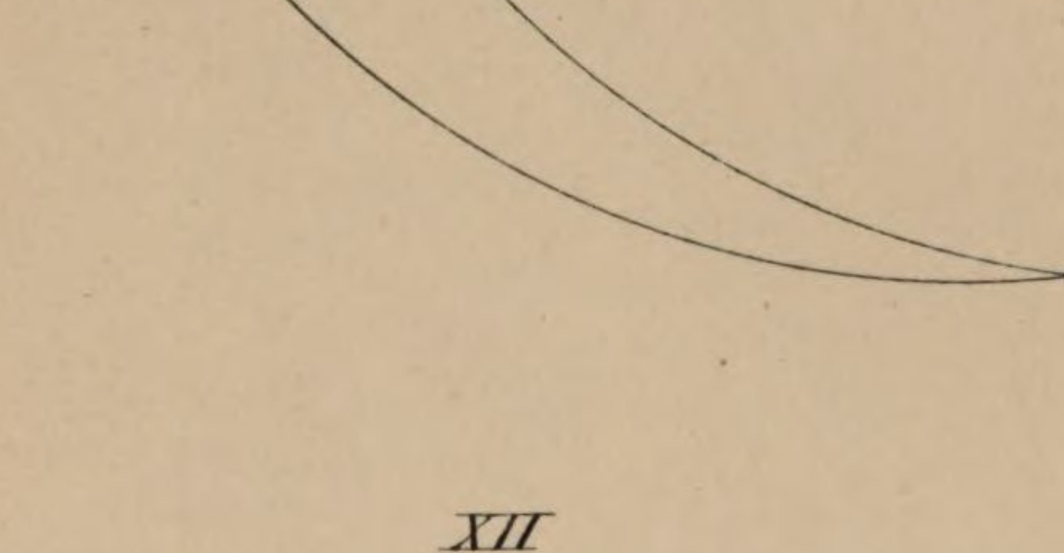
IX.

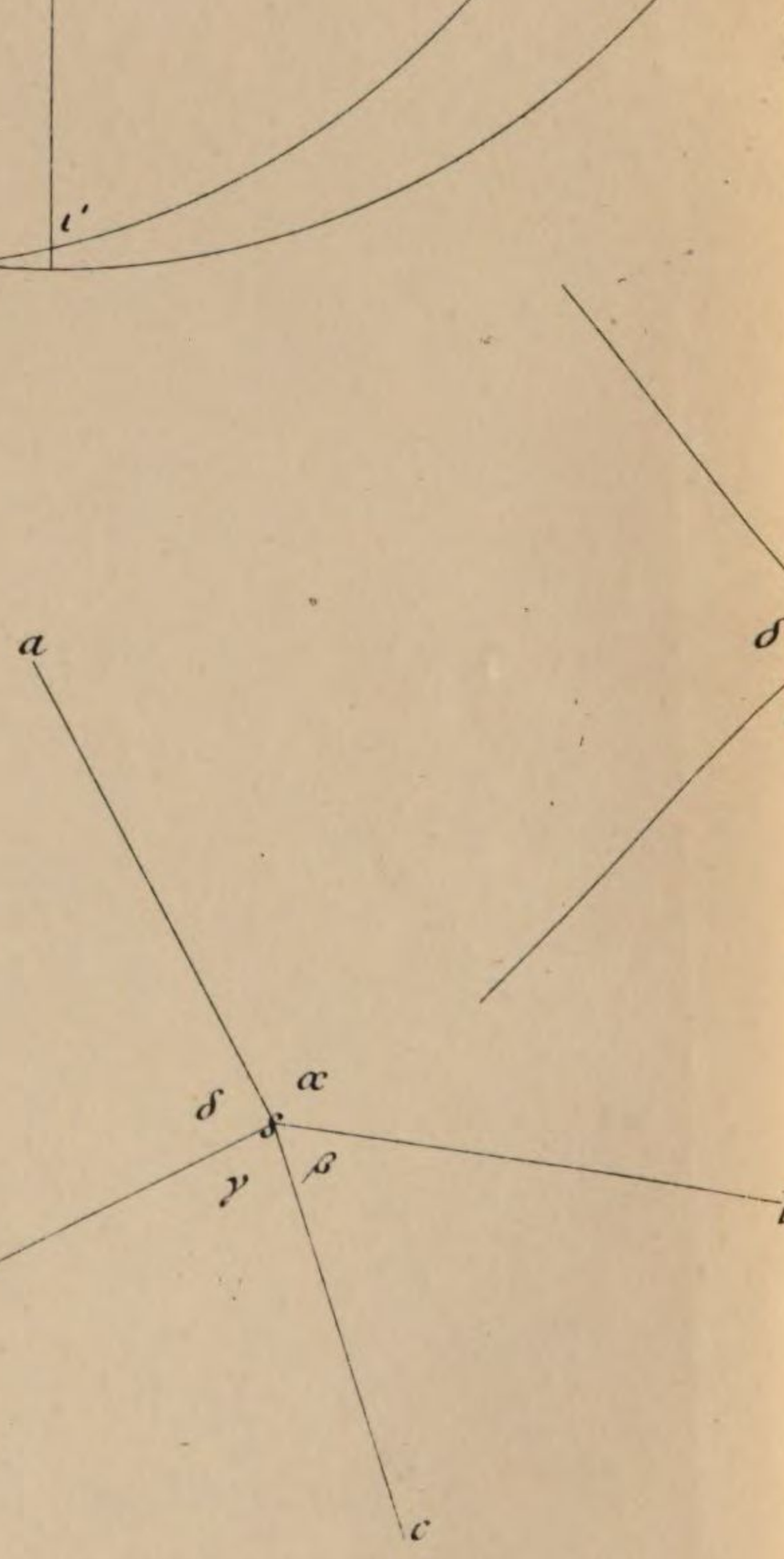


X.

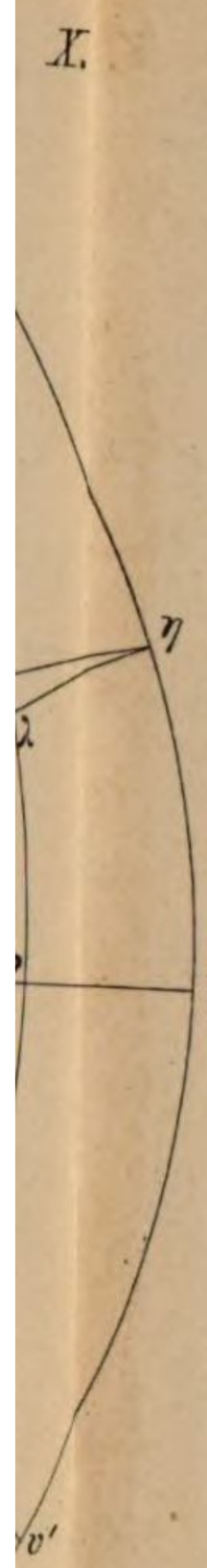


XII



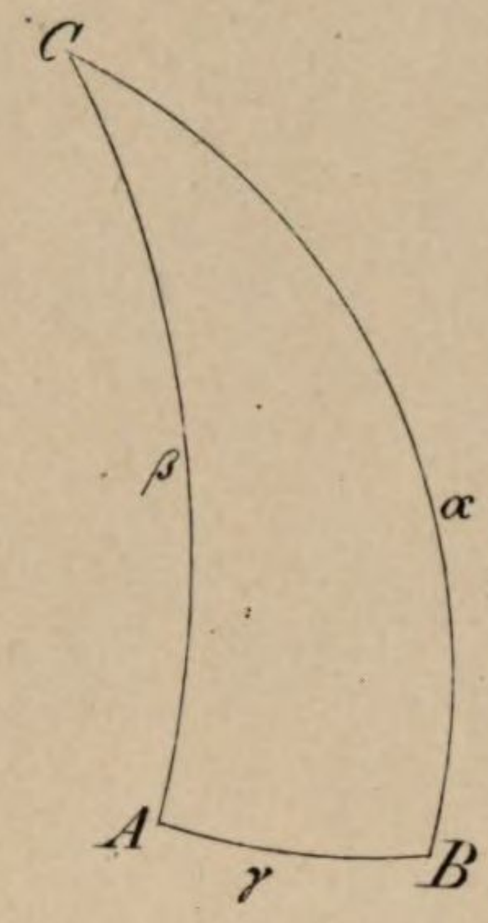


X.

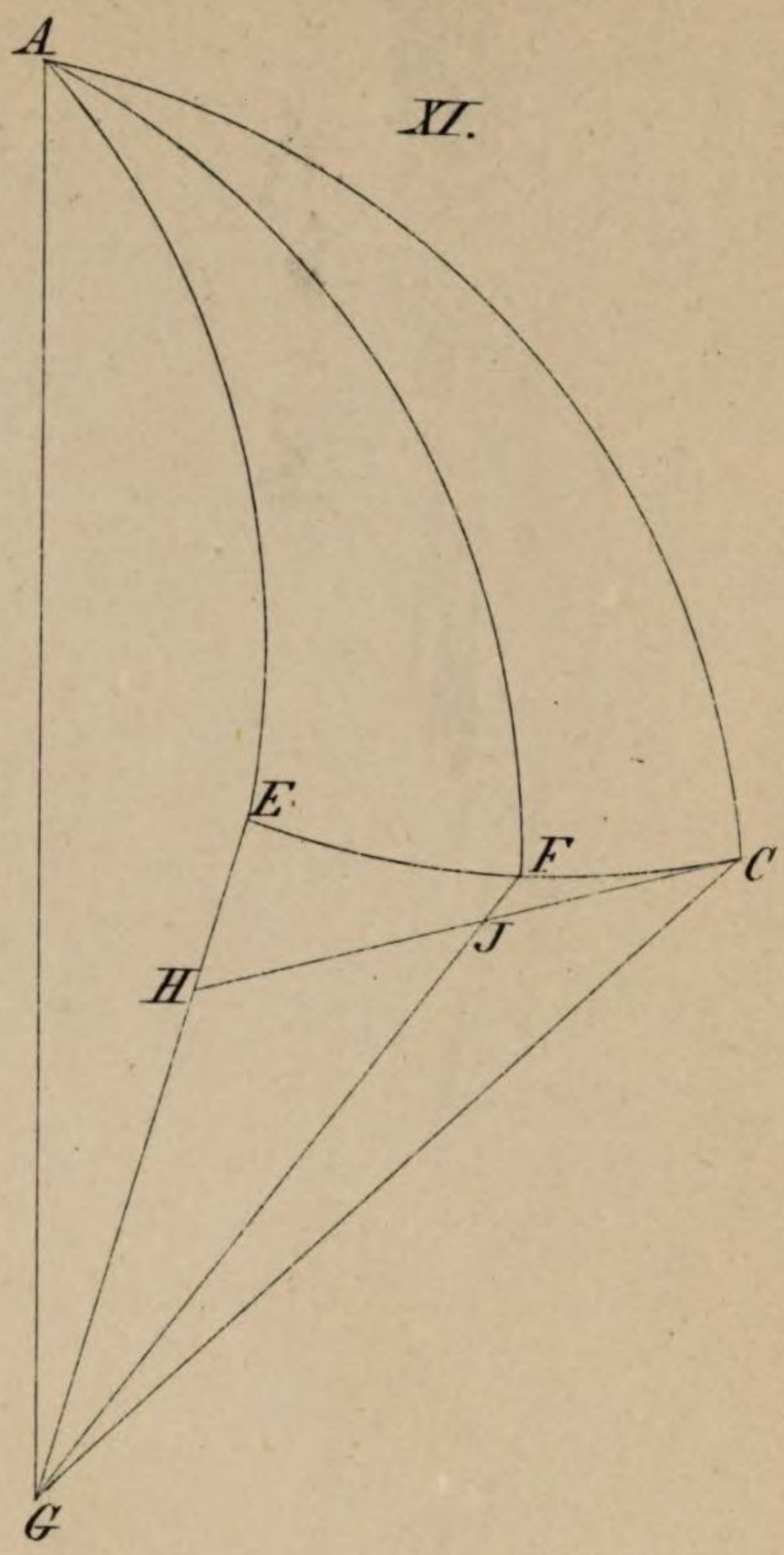


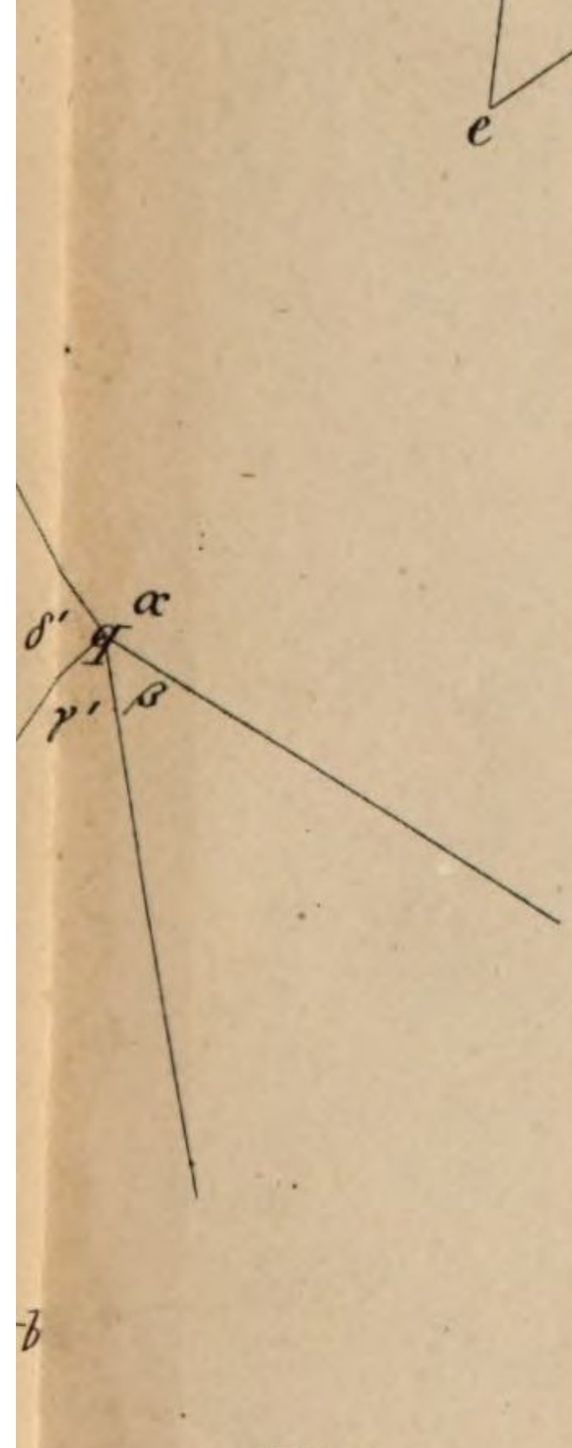
XIV.



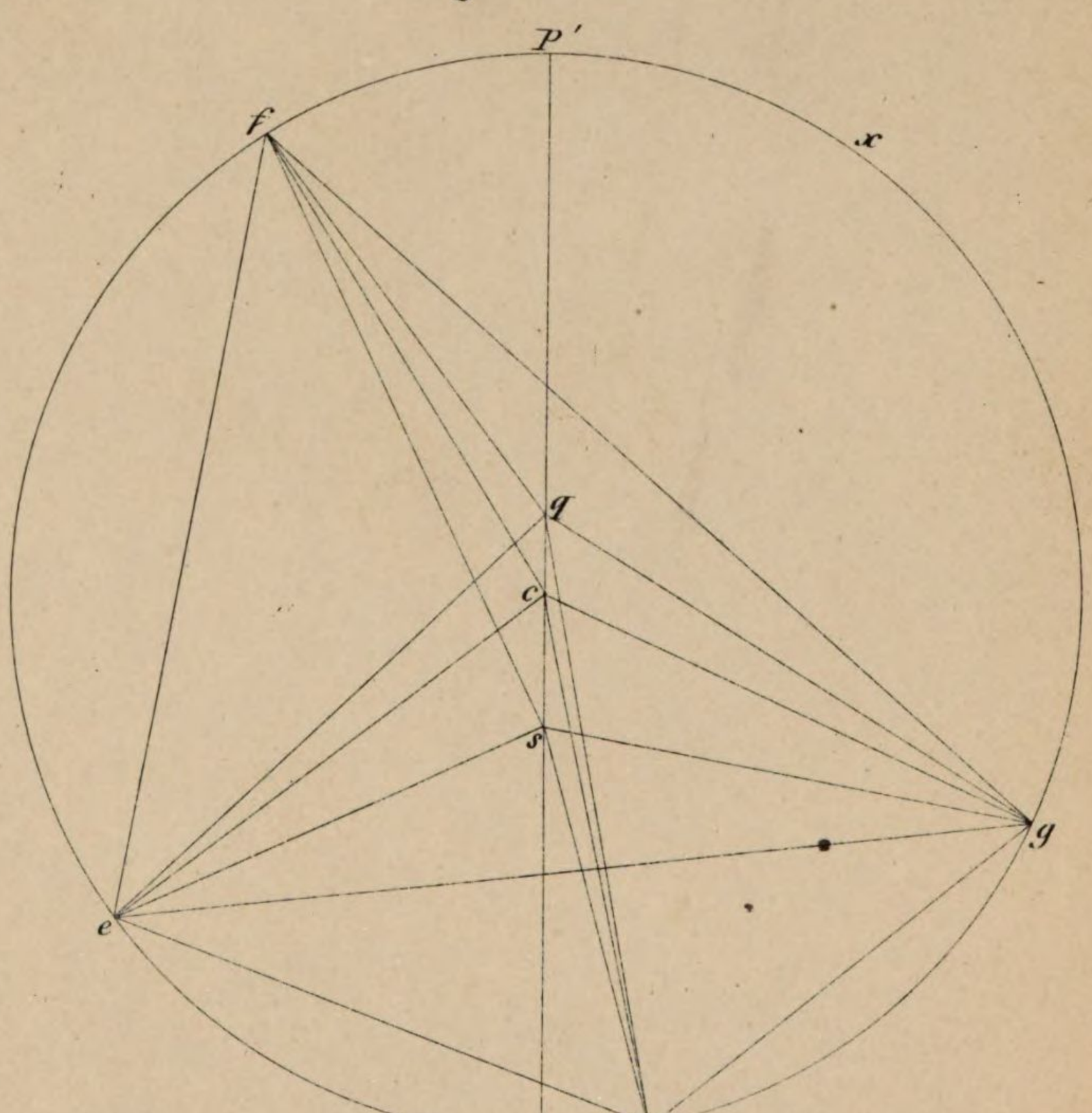


XI.

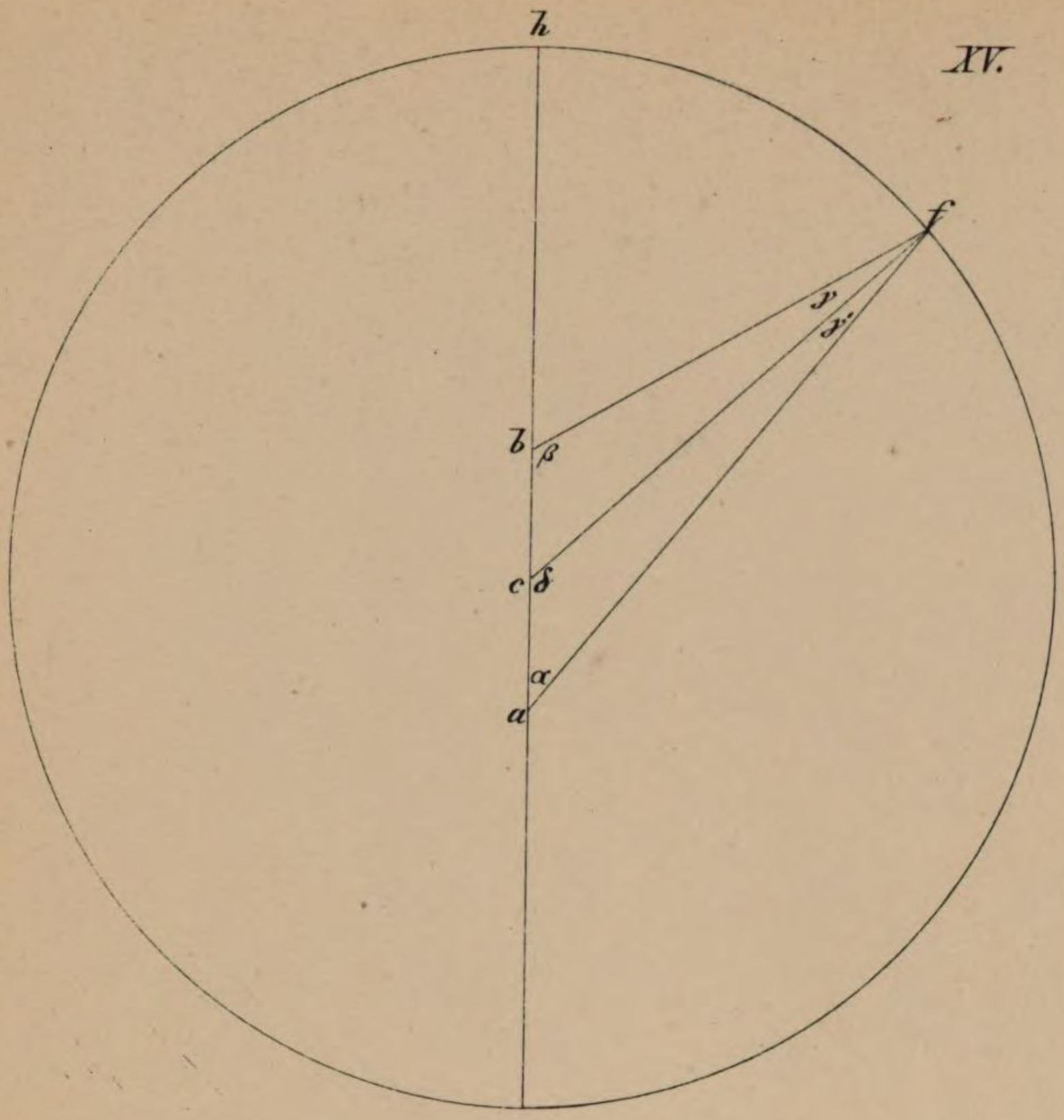




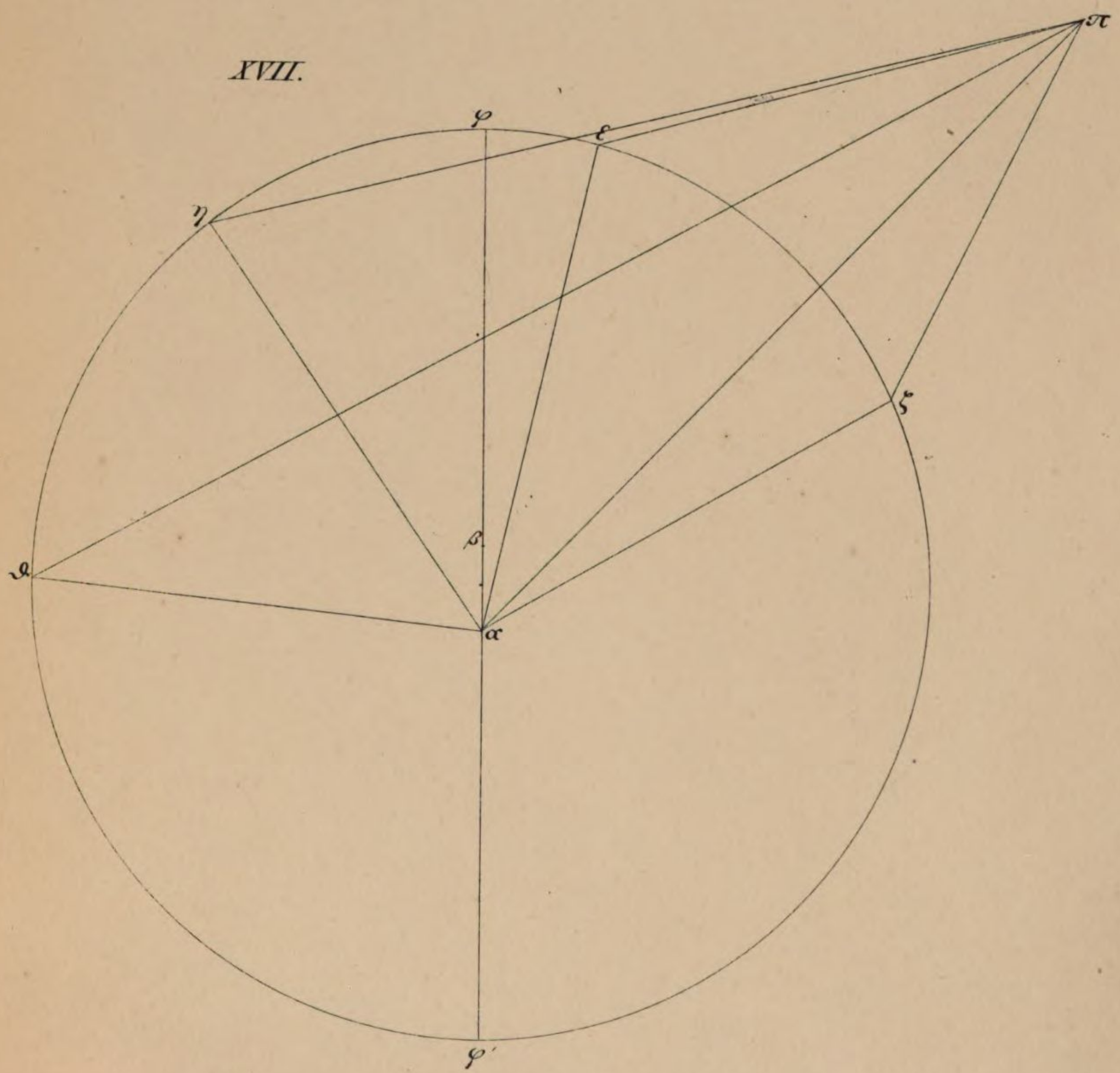
XIII.



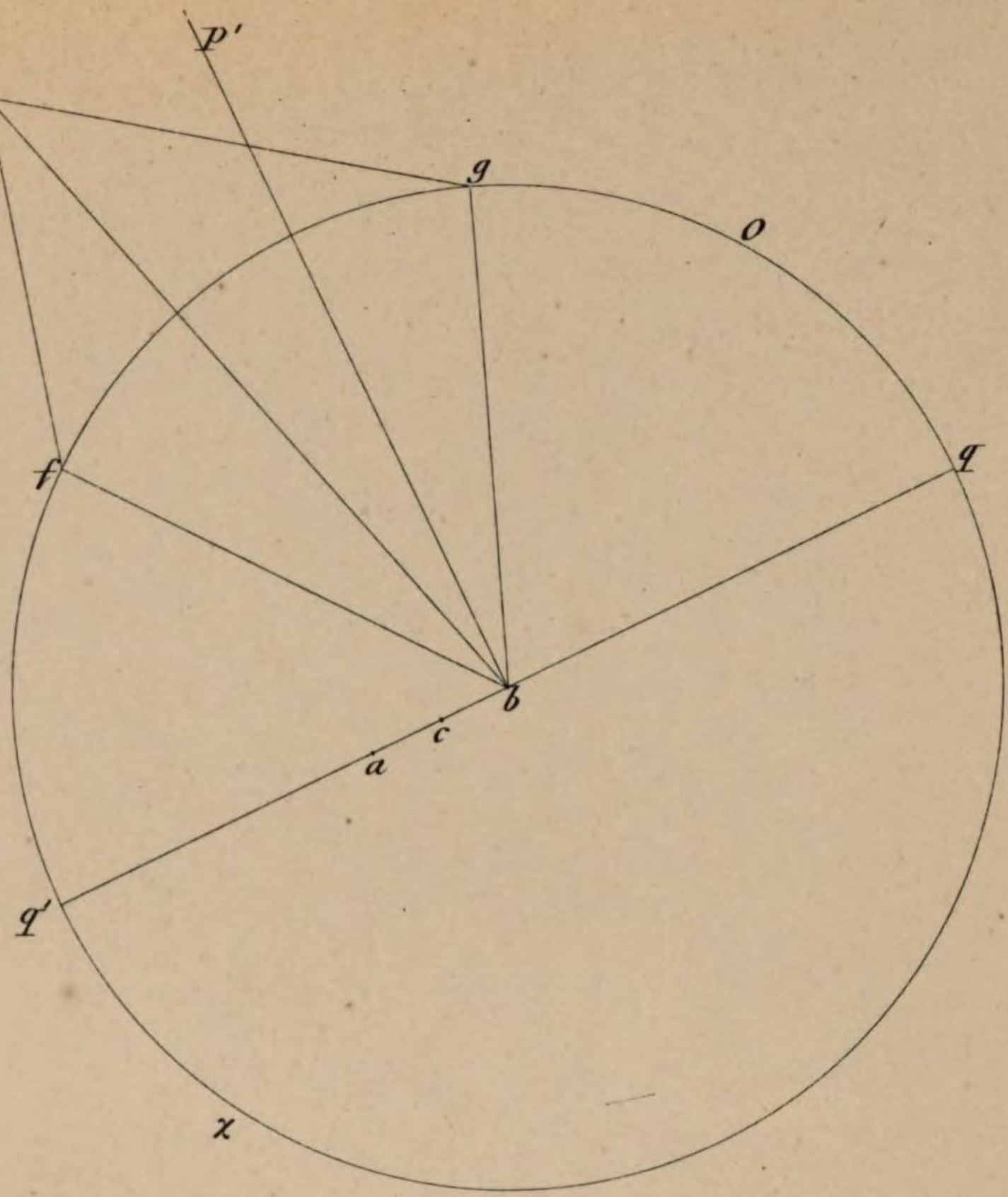
XV.



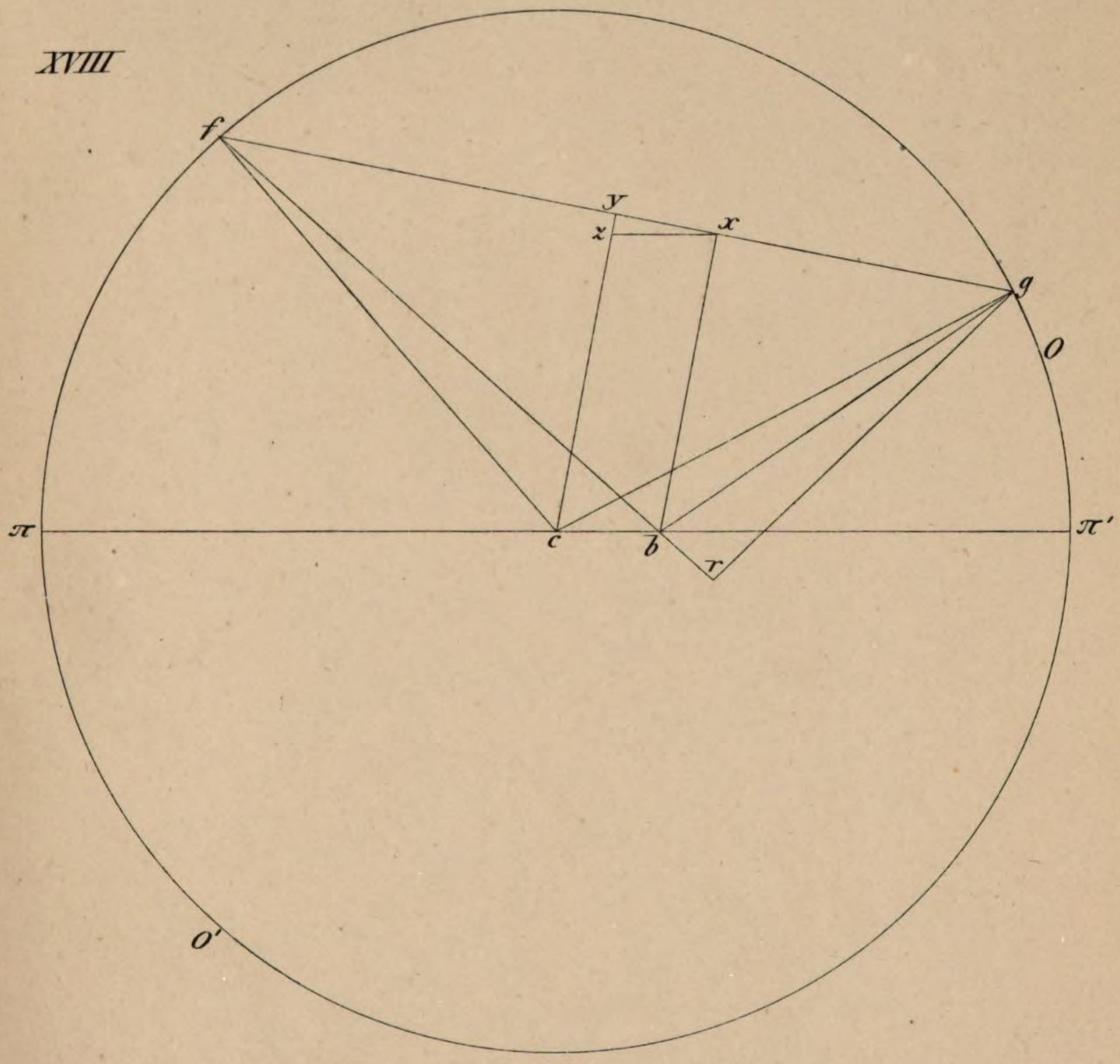
XVII.



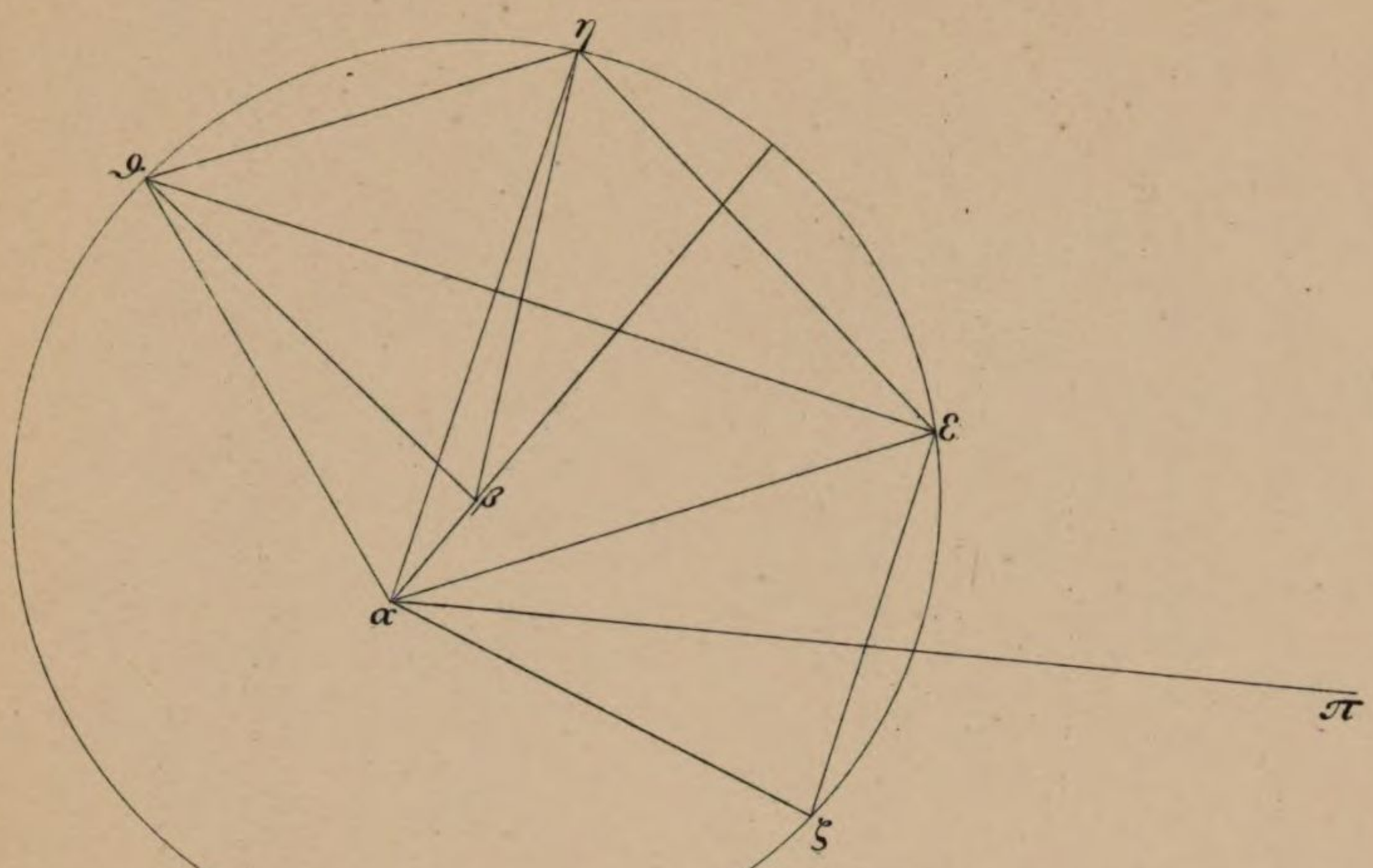
XVI.



XVIII

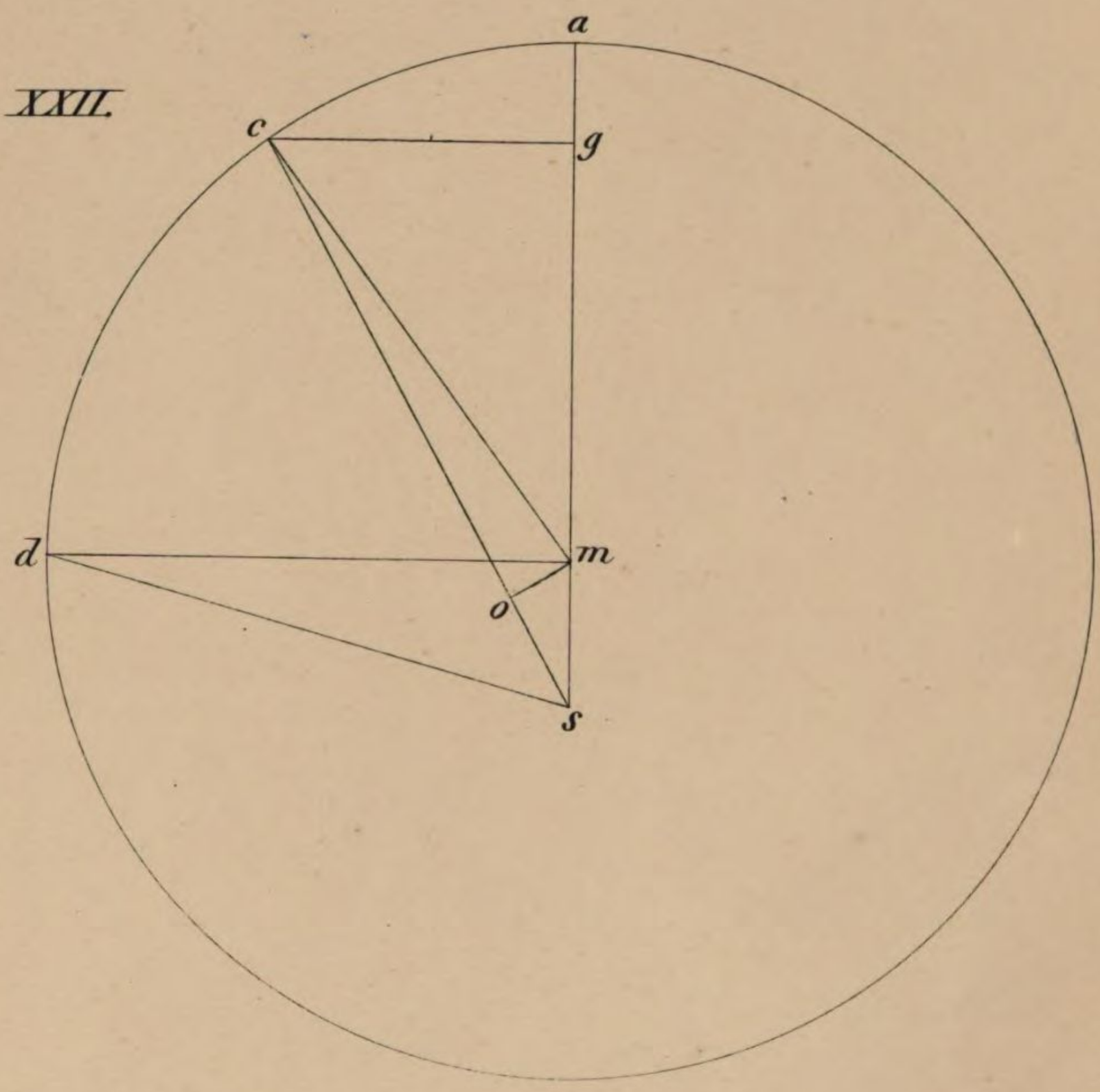


XIX.

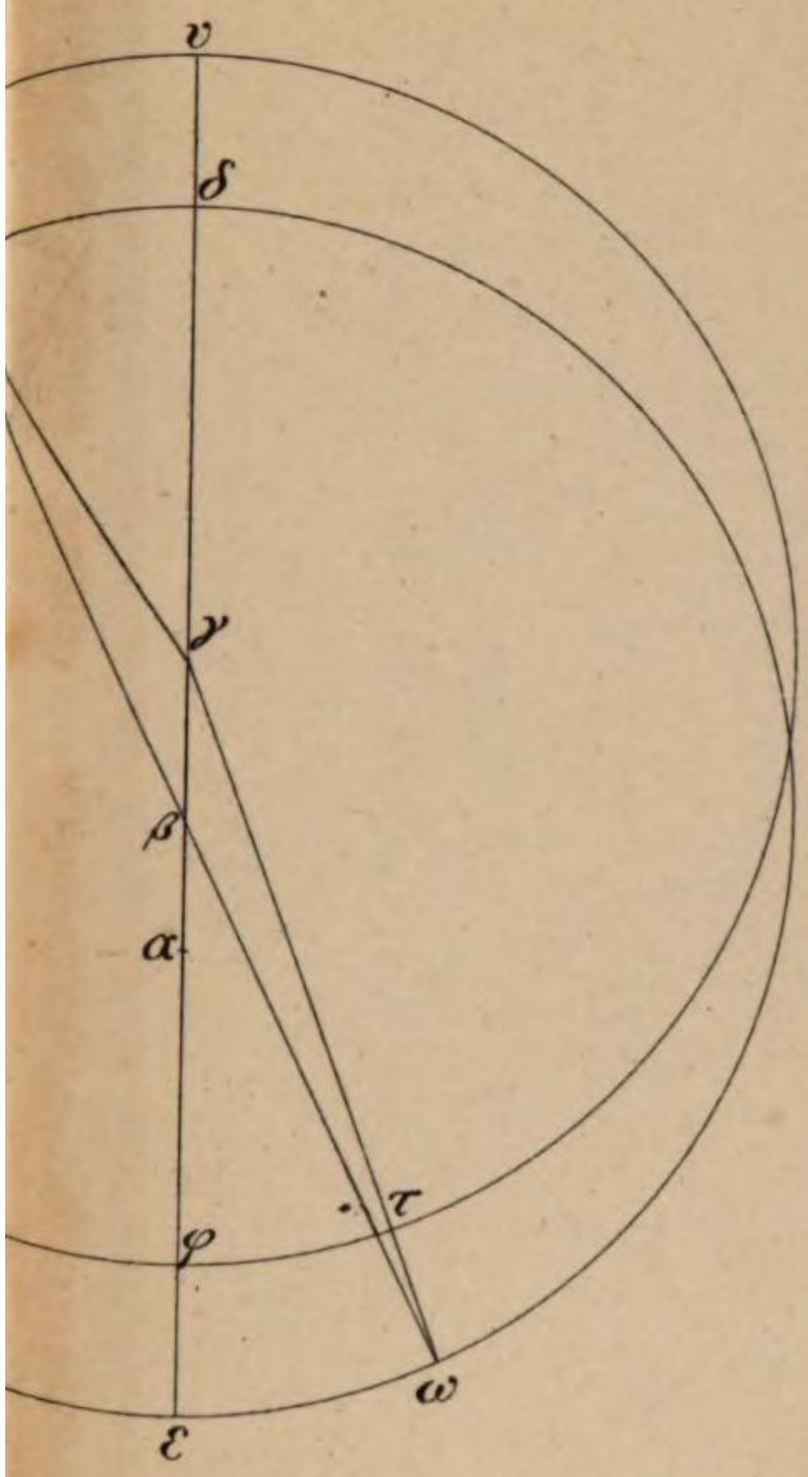




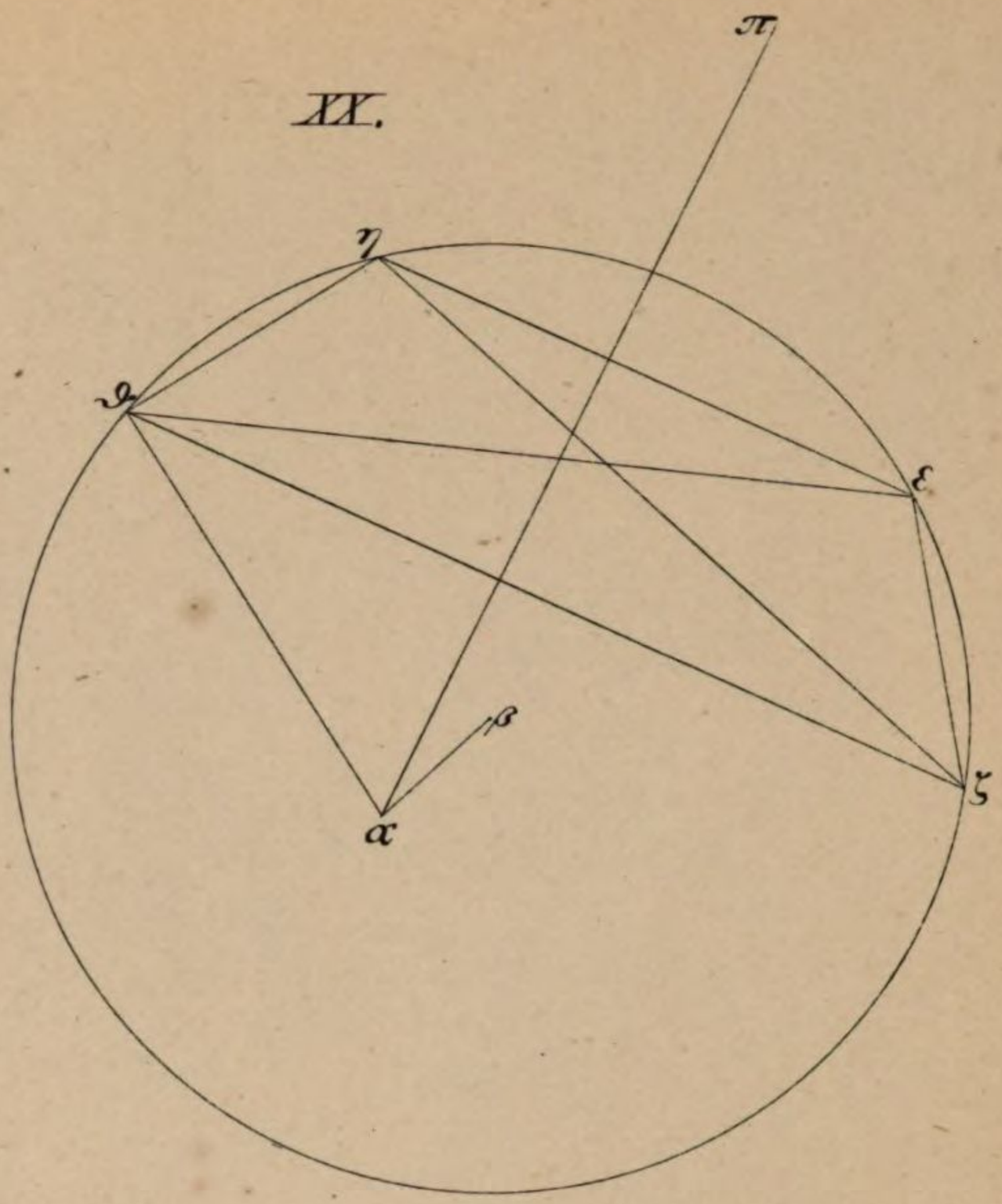
XXII.



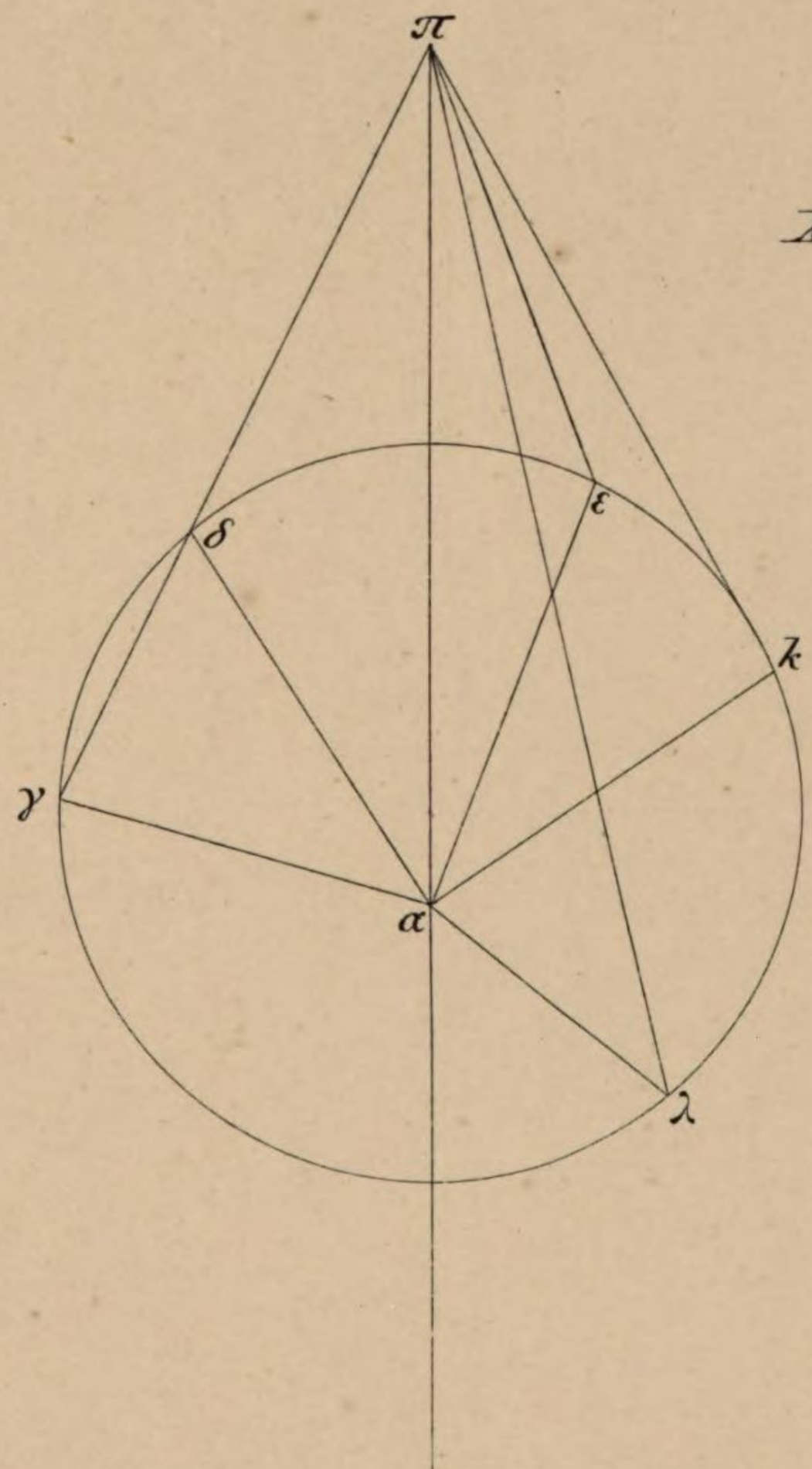
XXI.



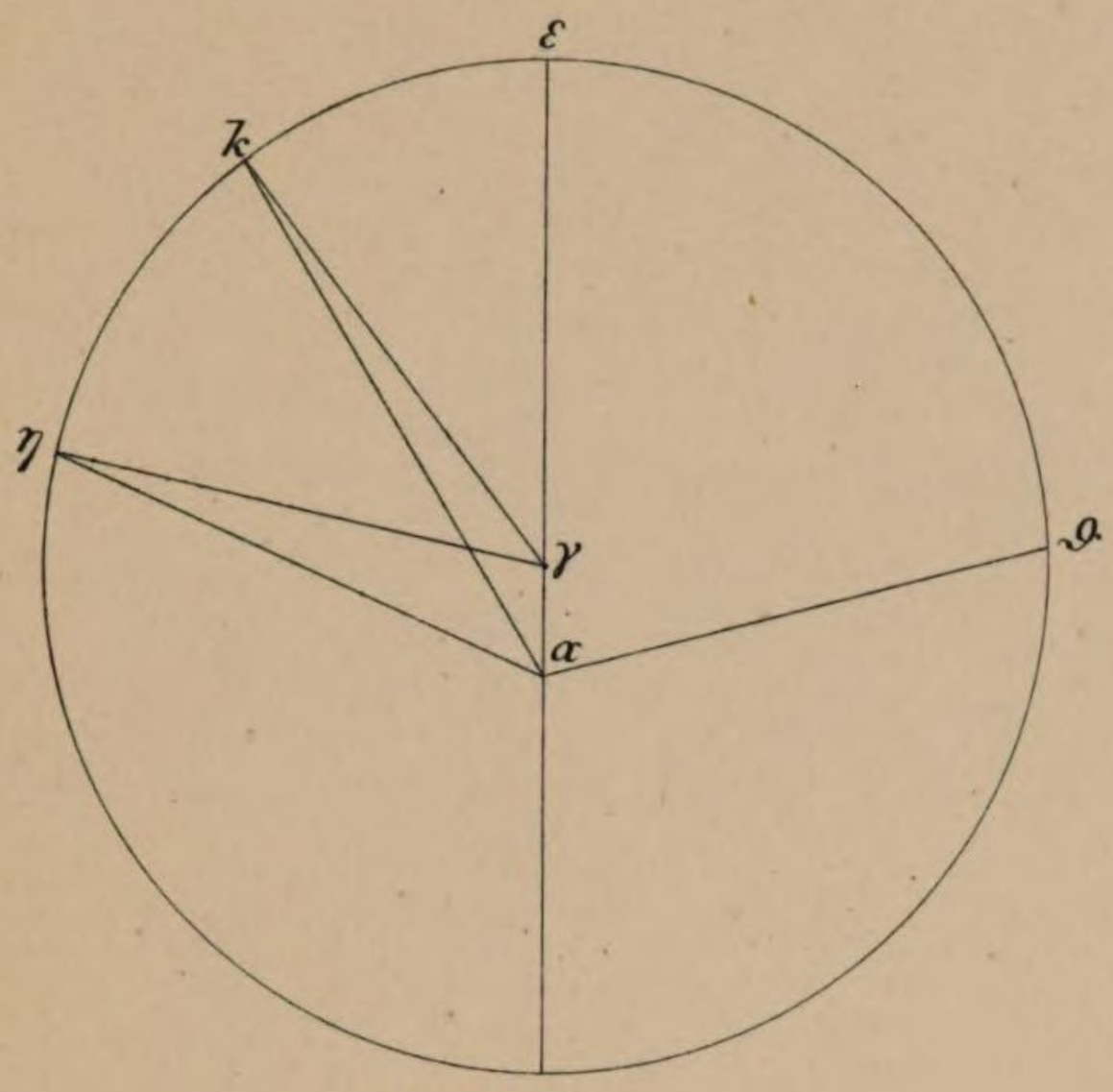
XX.

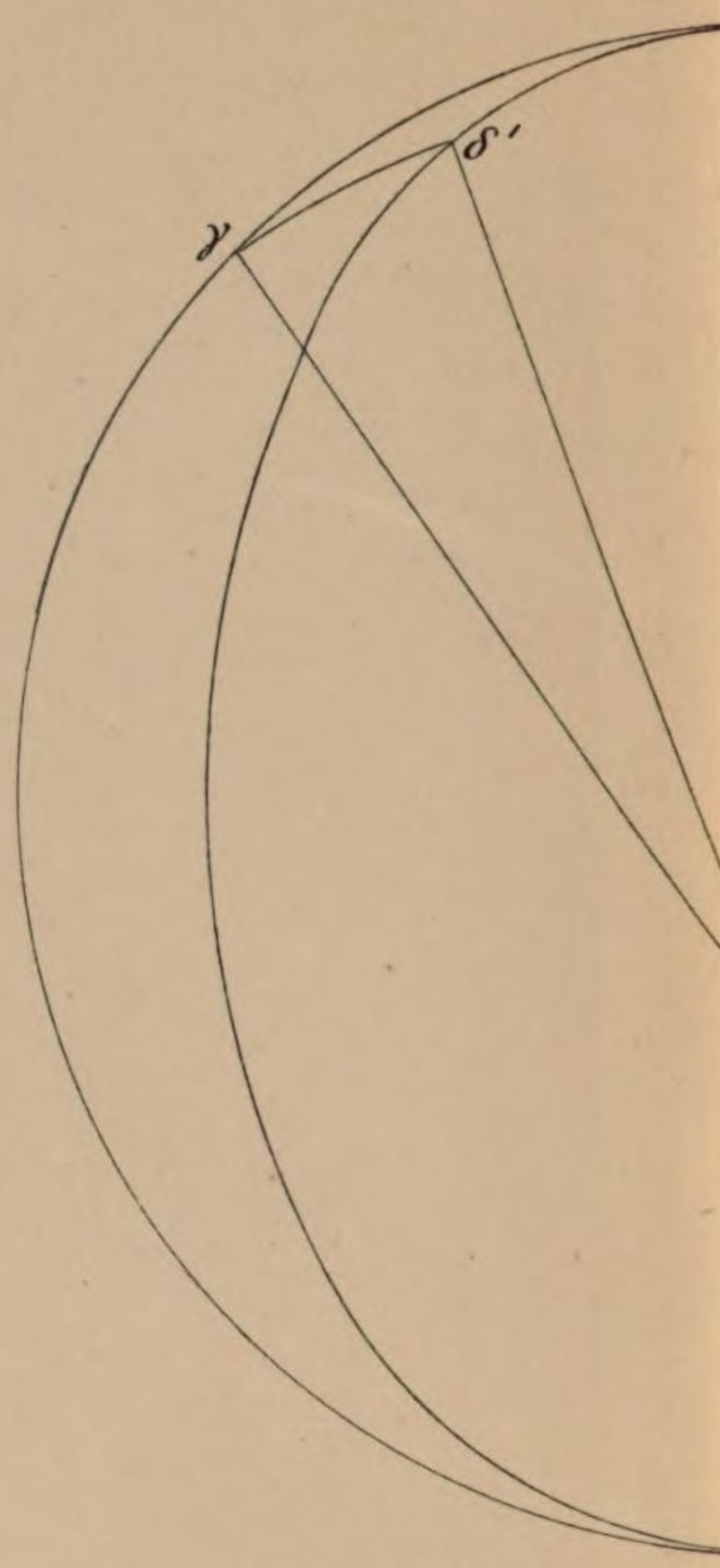


XXIII.

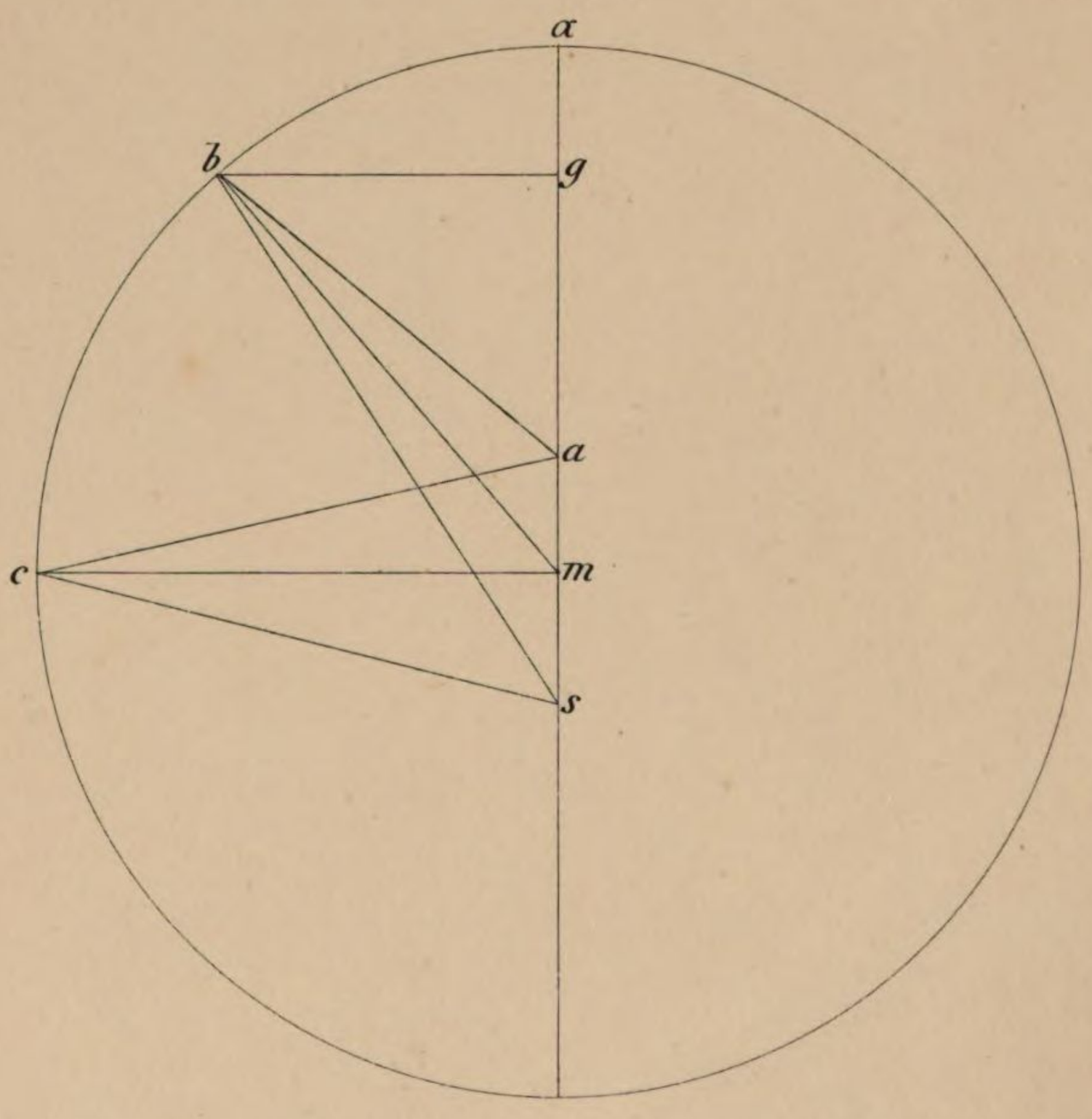


XXV.



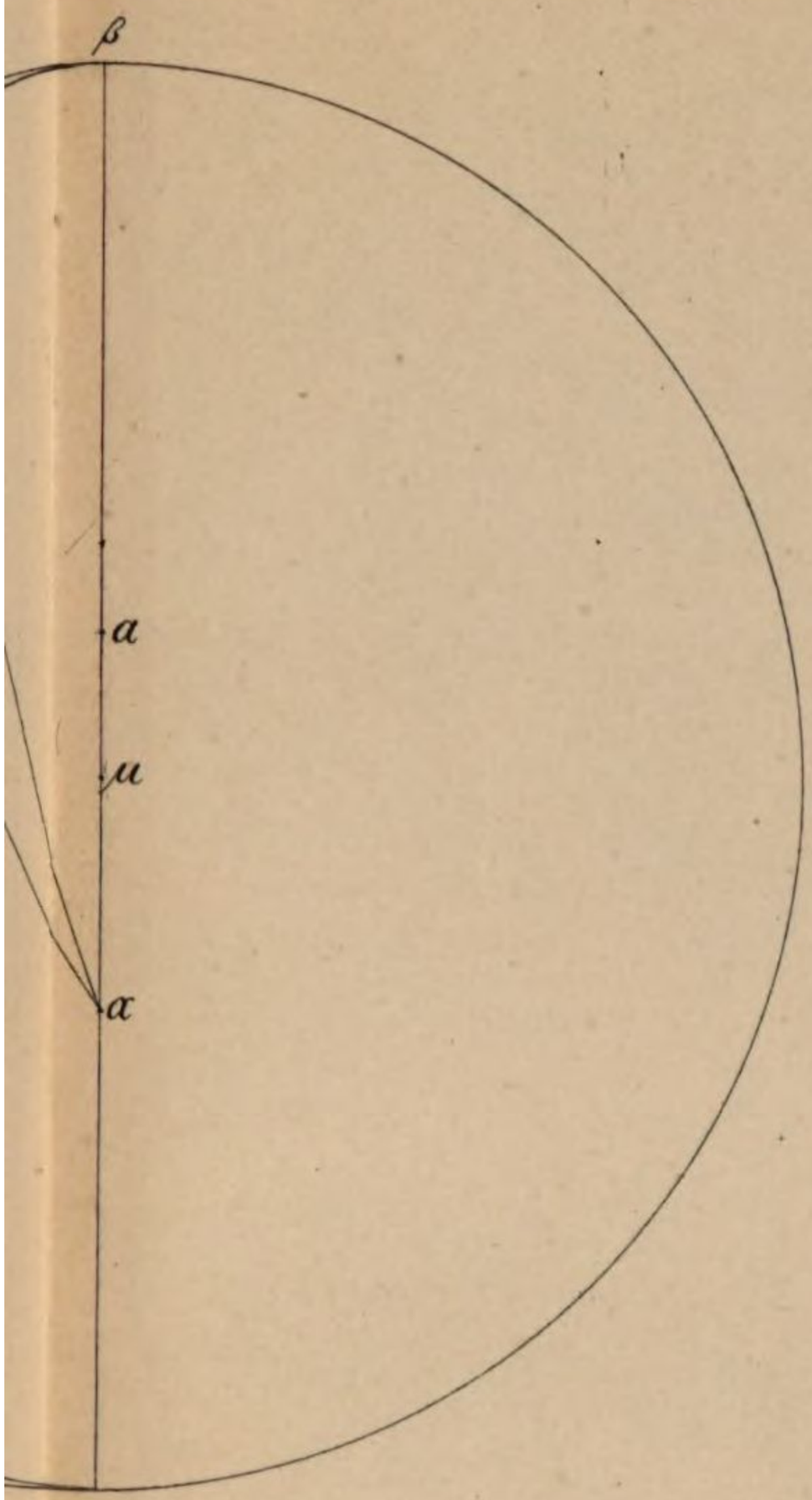


XXIV.

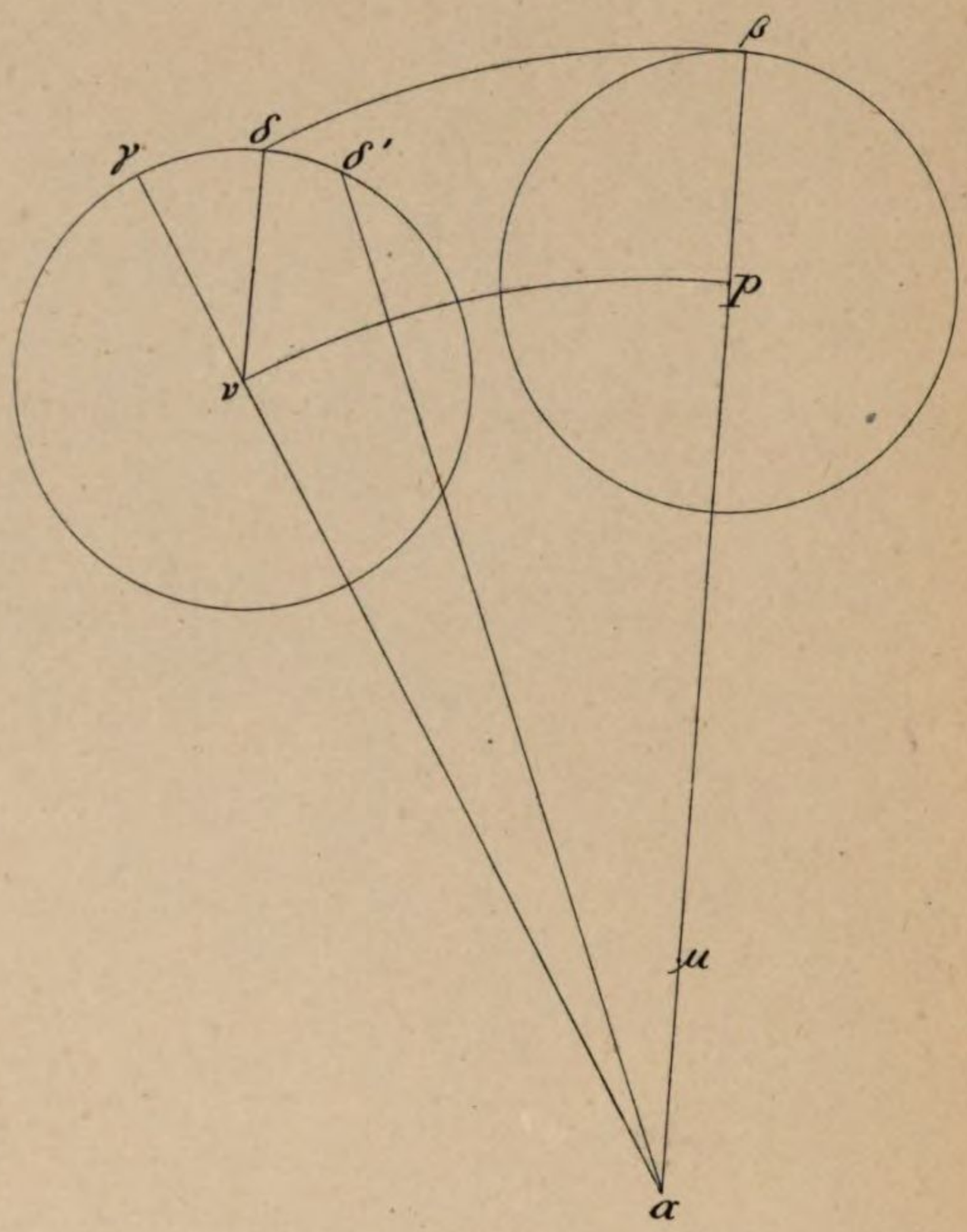




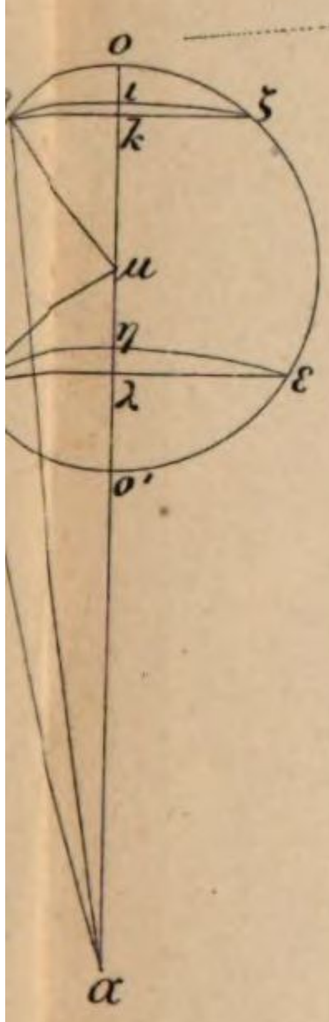
XXVII.

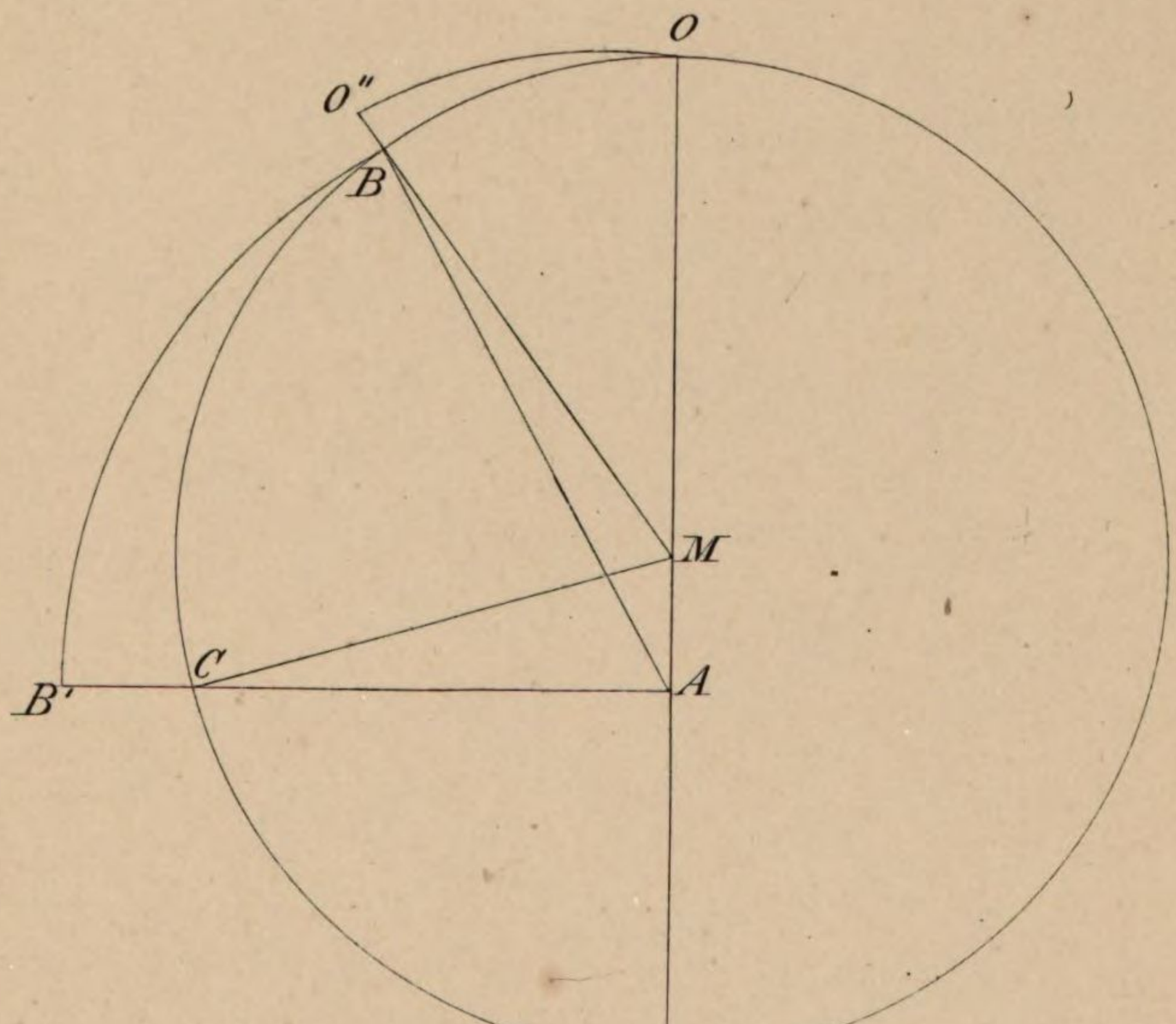


XXVI b.

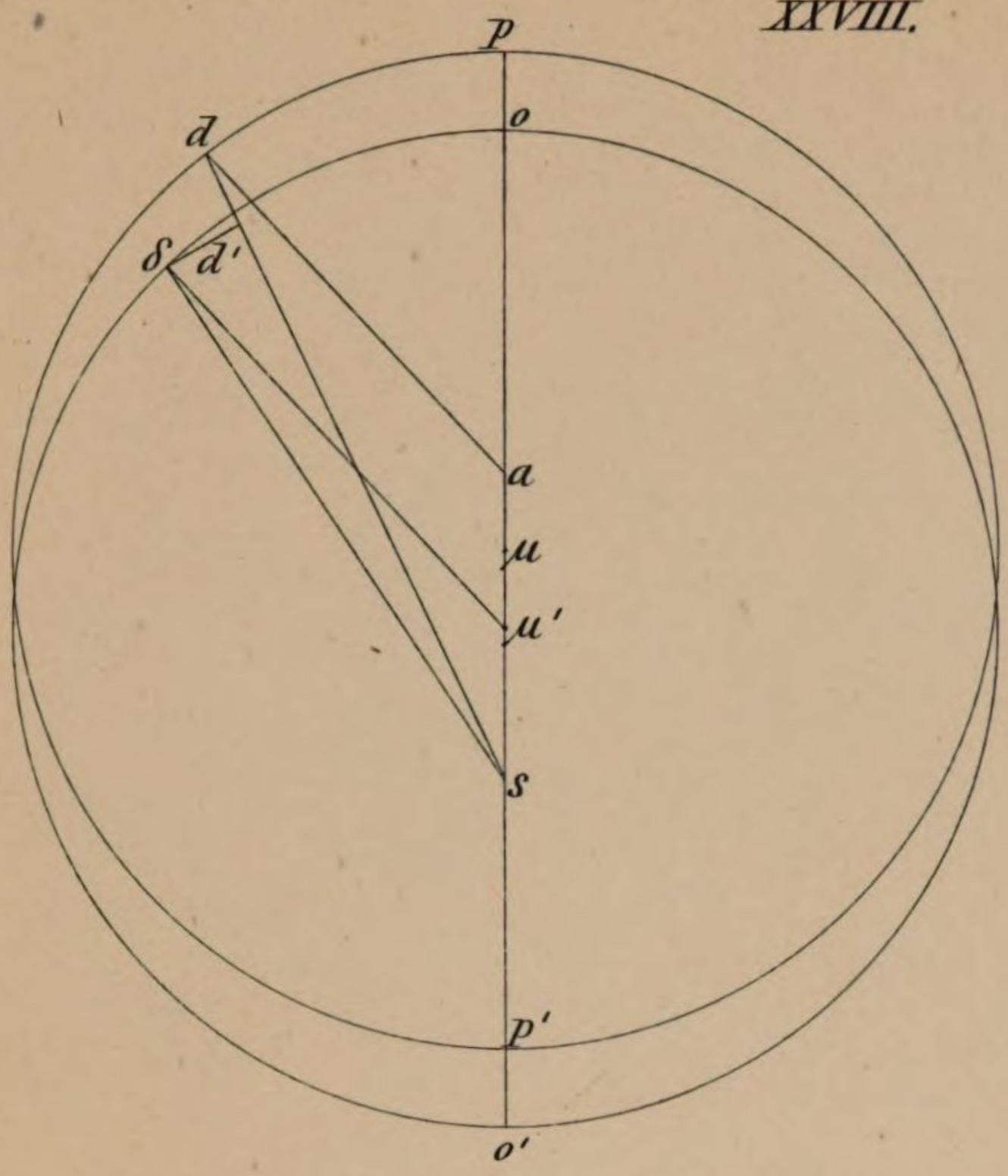


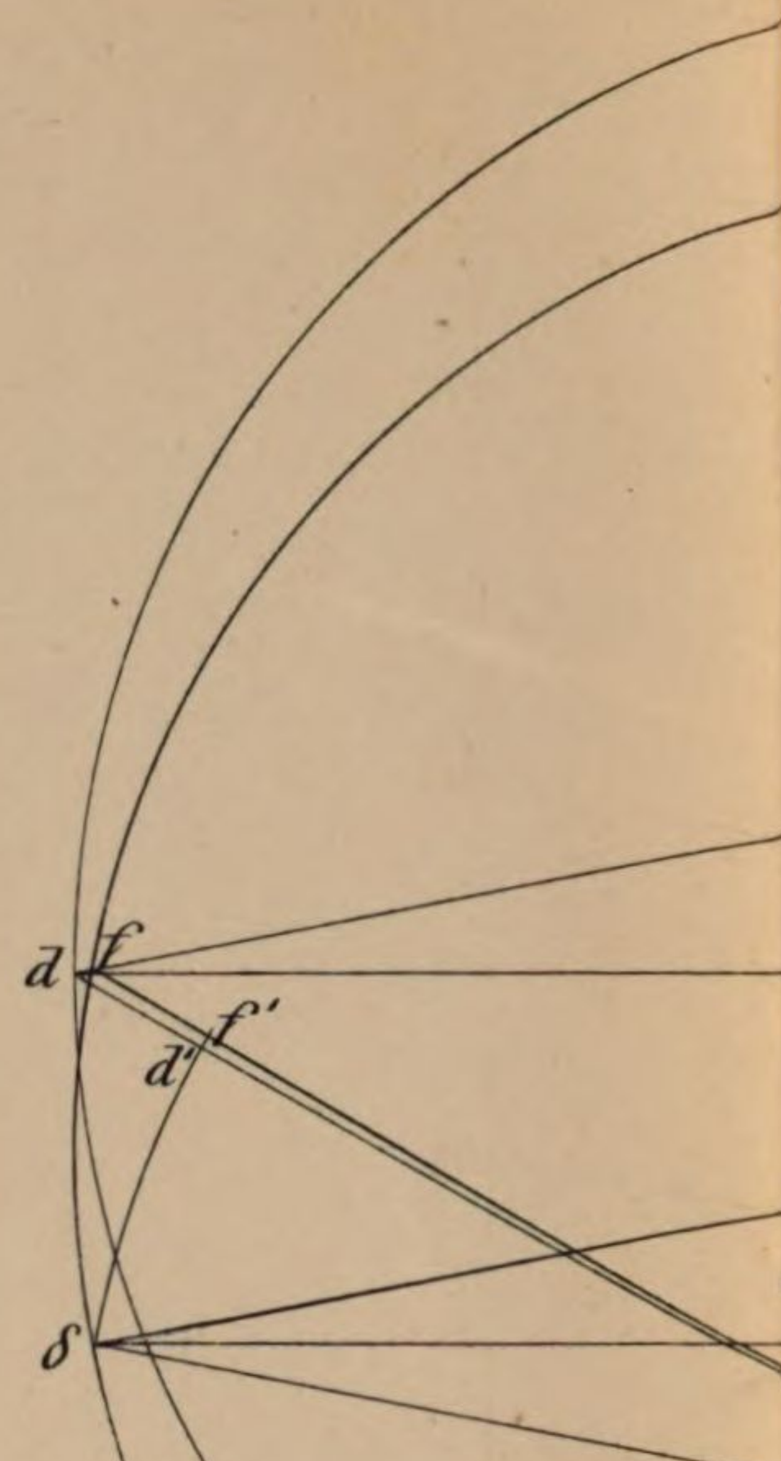
XXVI a



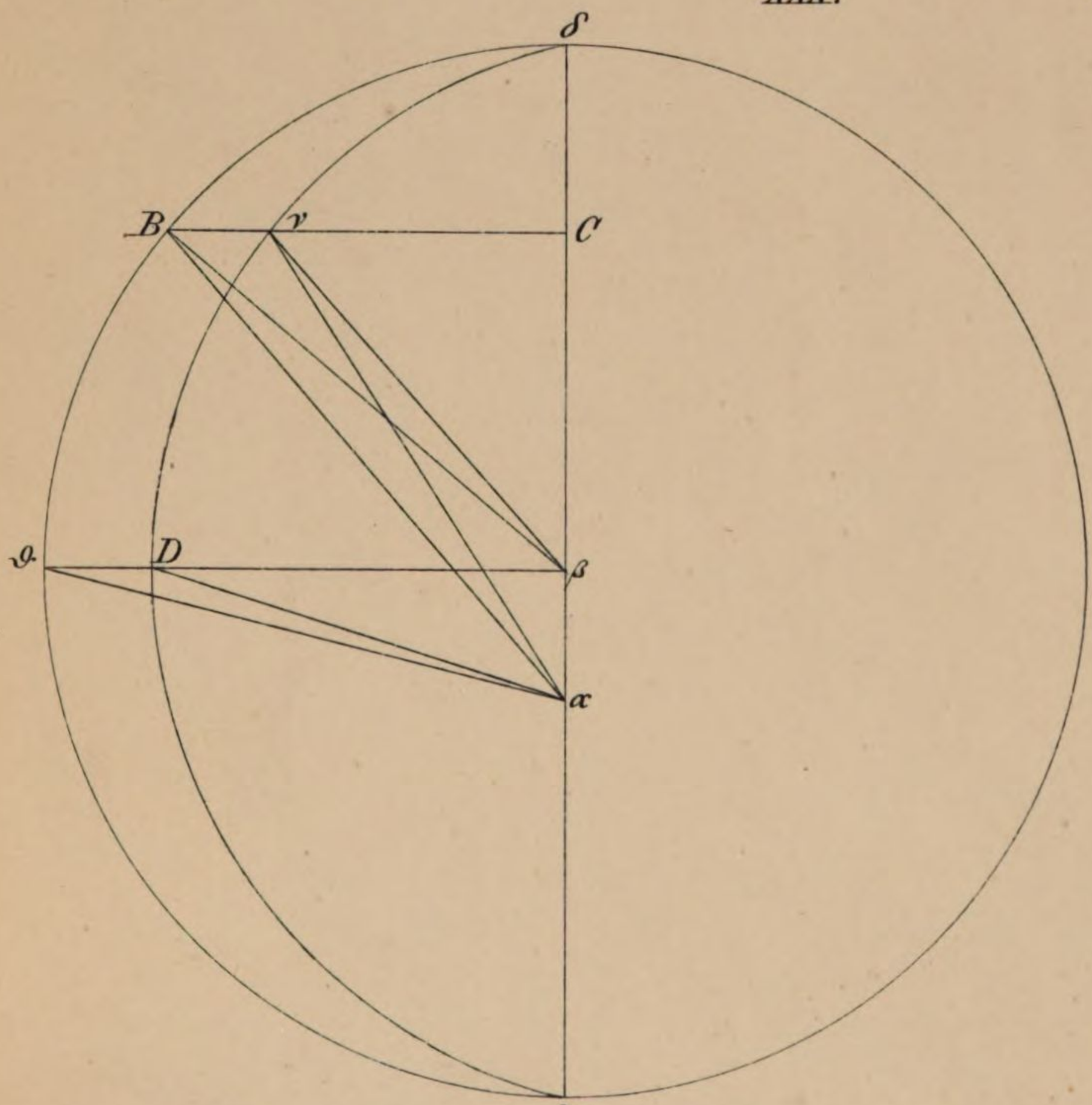


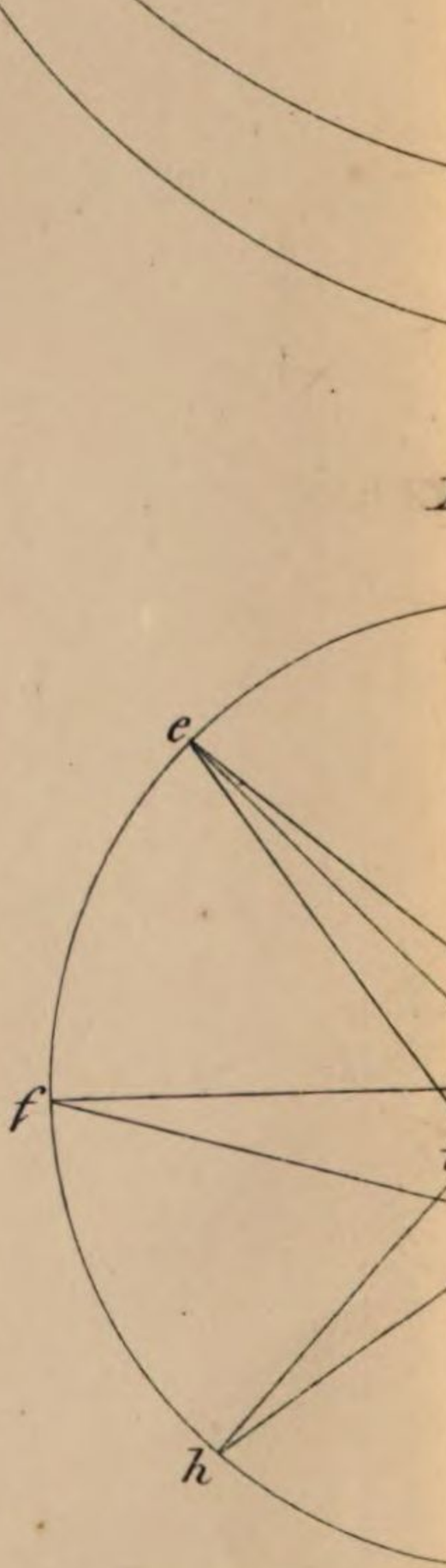
XXVIII.



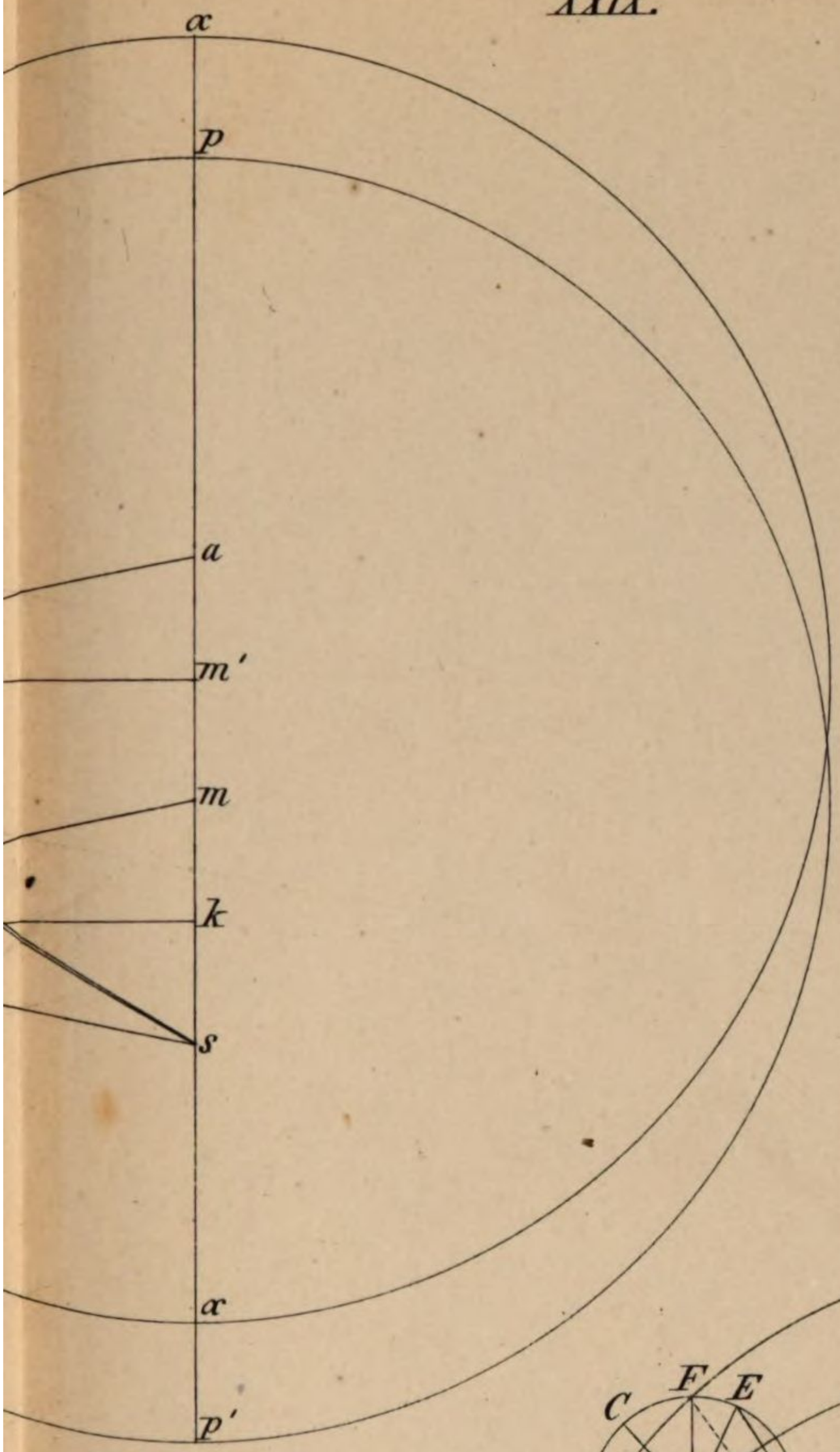


XXX.

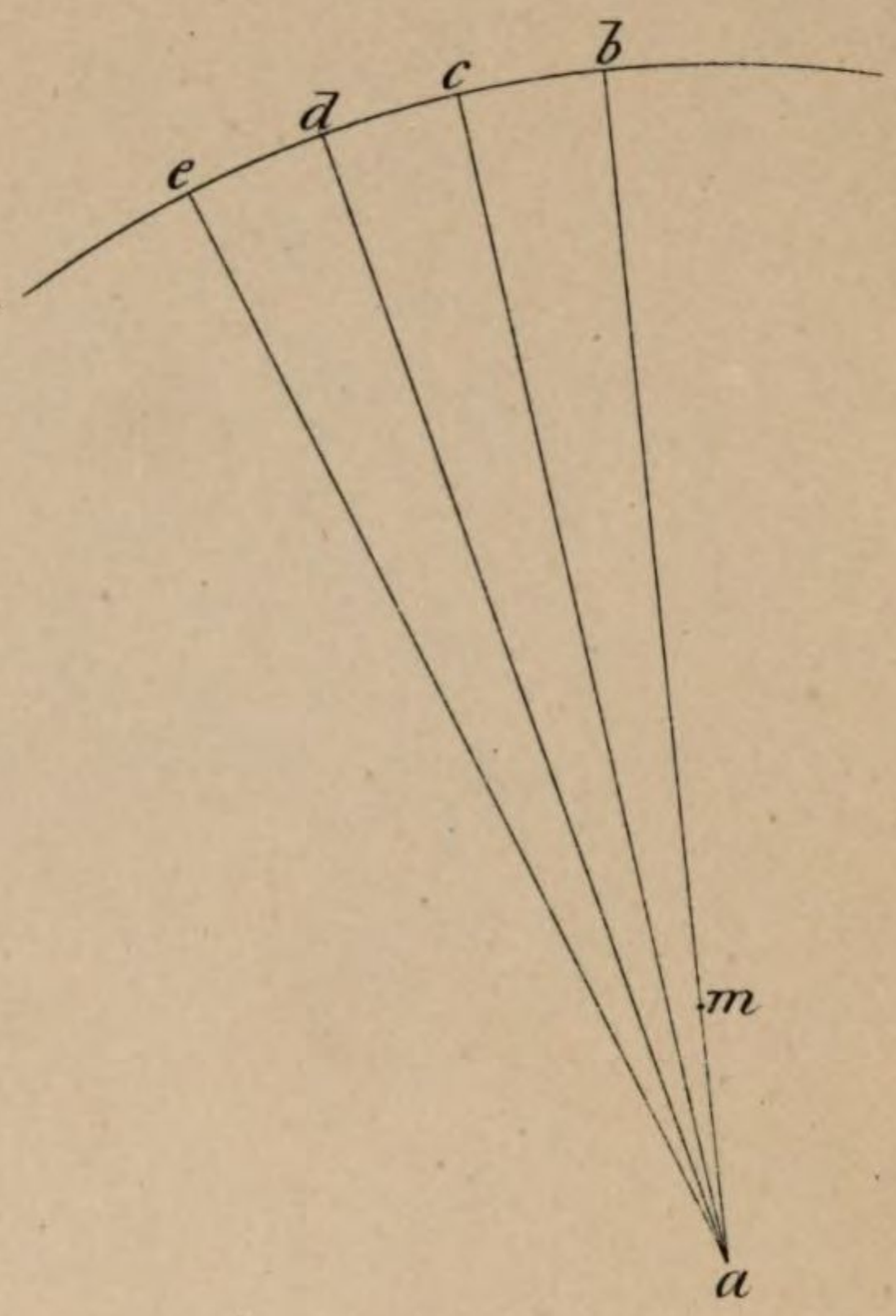




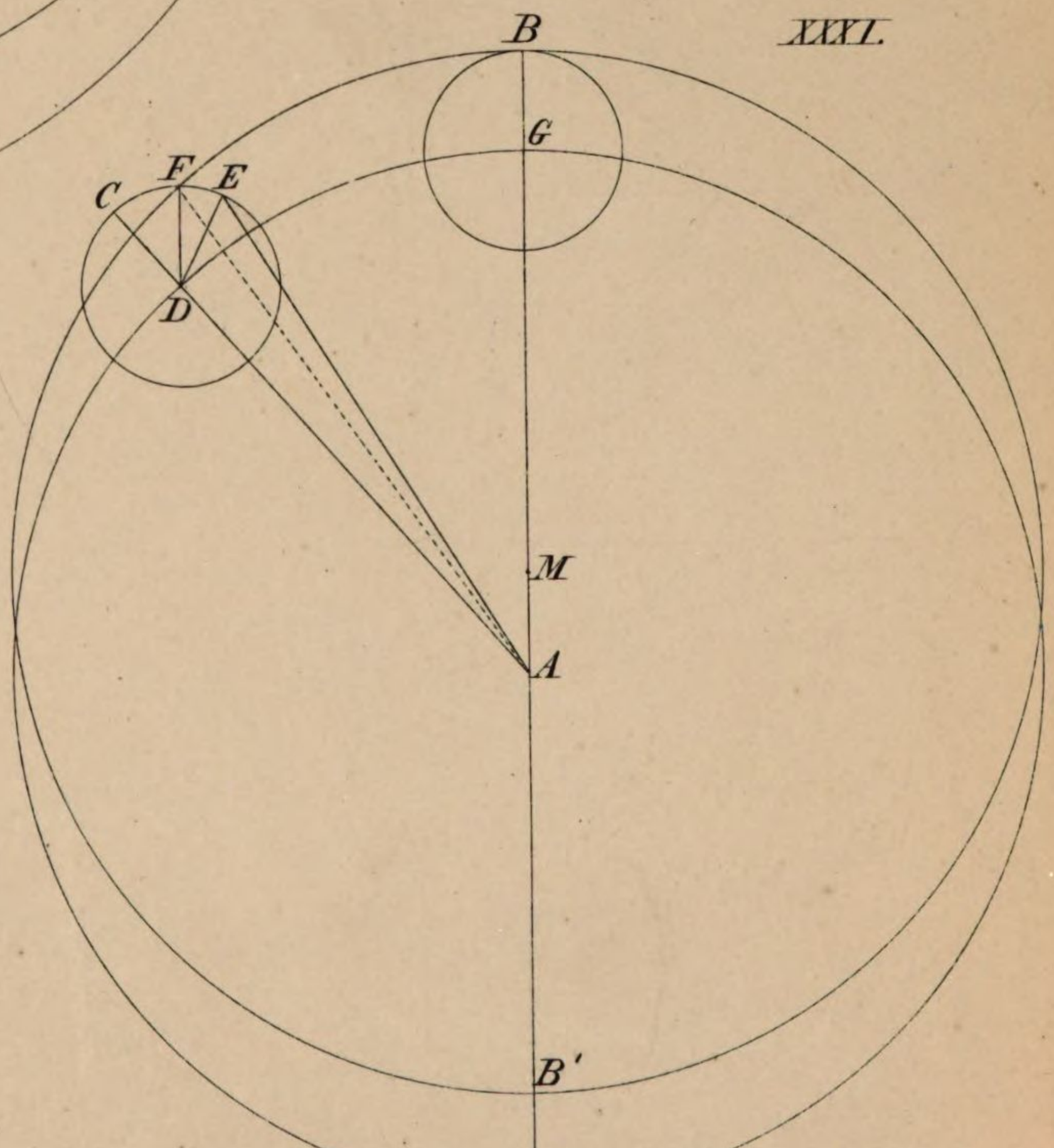
XXIX.



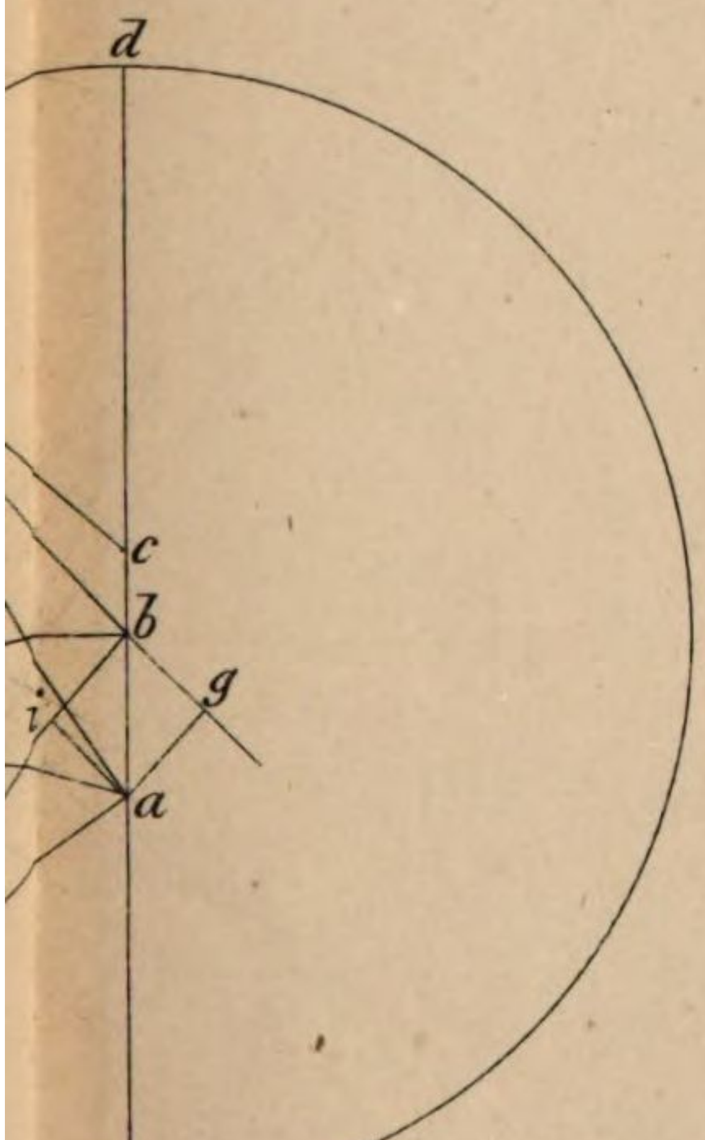
XXXII.

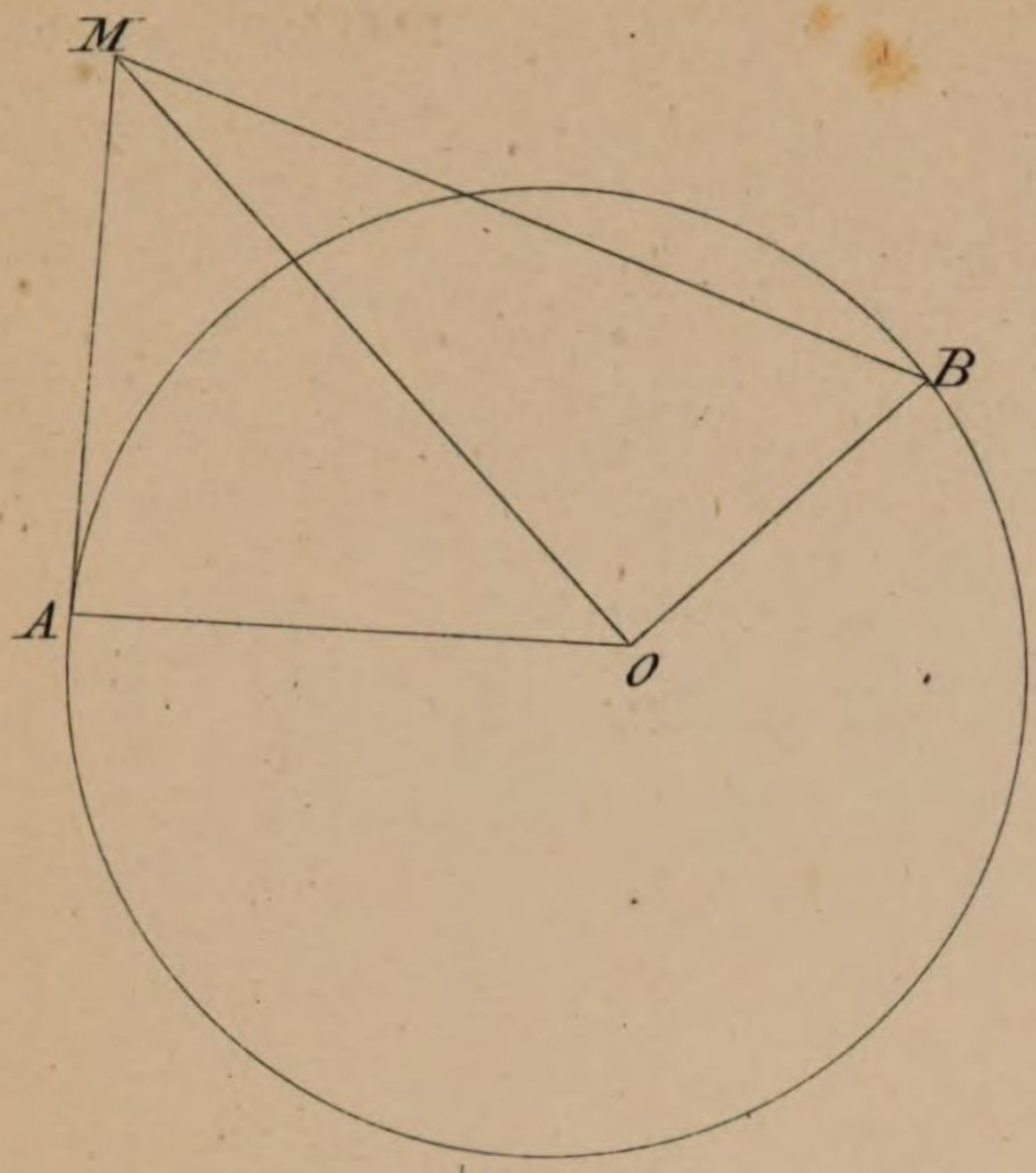


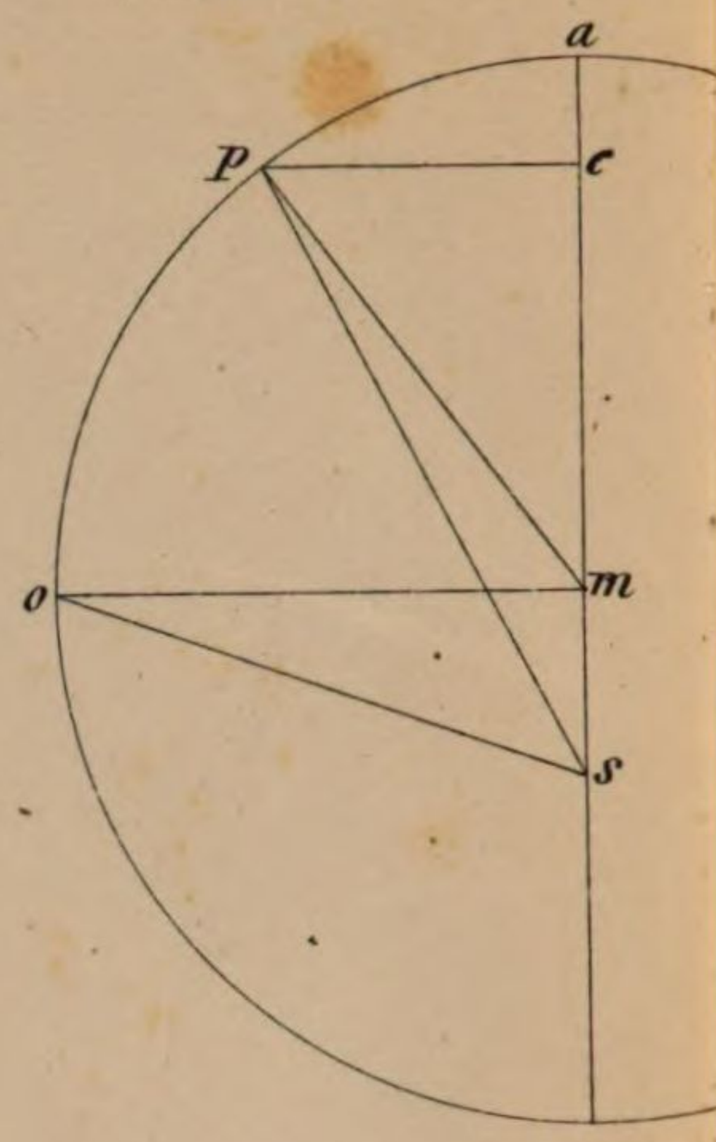
XXXI.



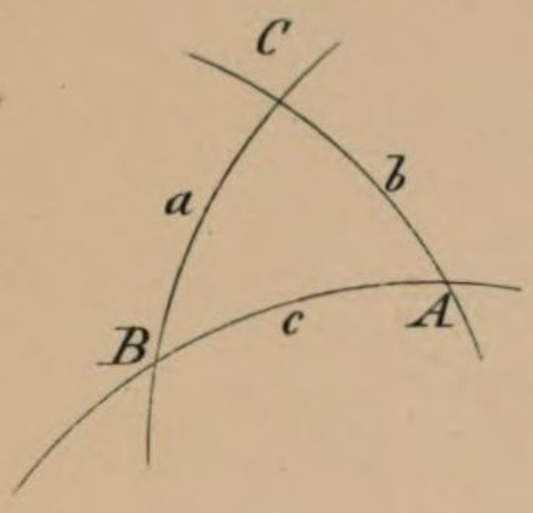
XXXIII.





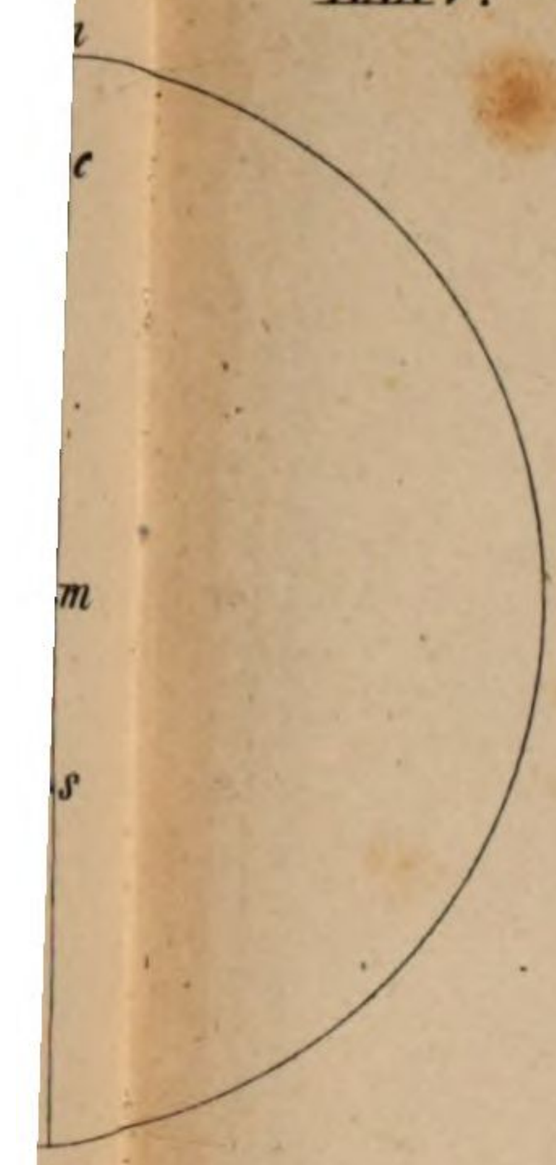


XXXIV.

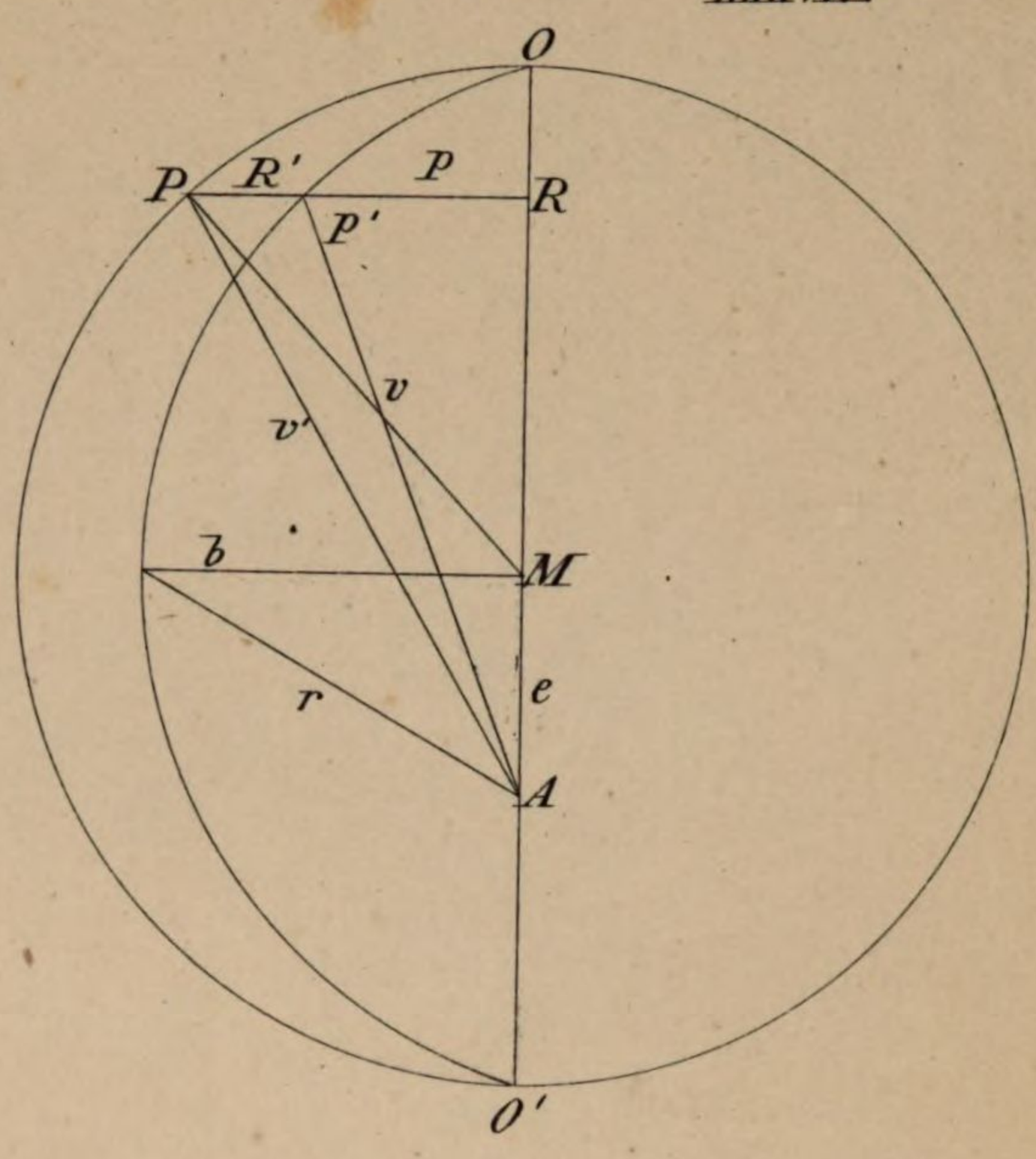


XXXVI.

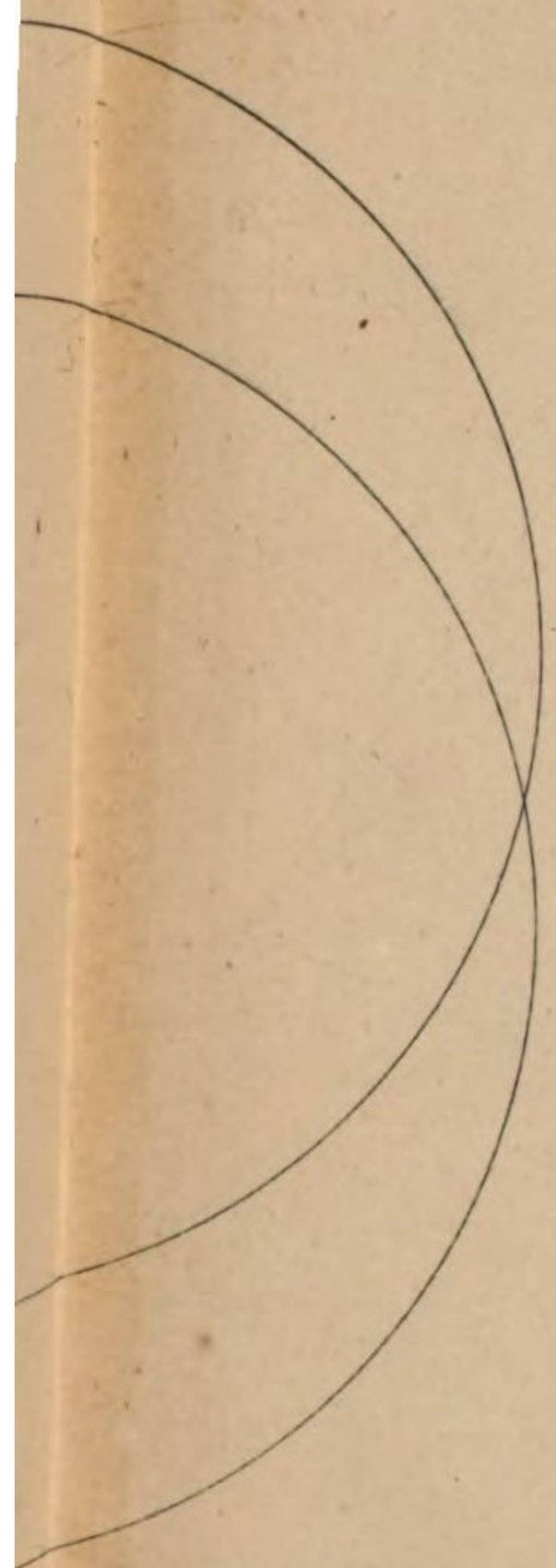
XXXV.

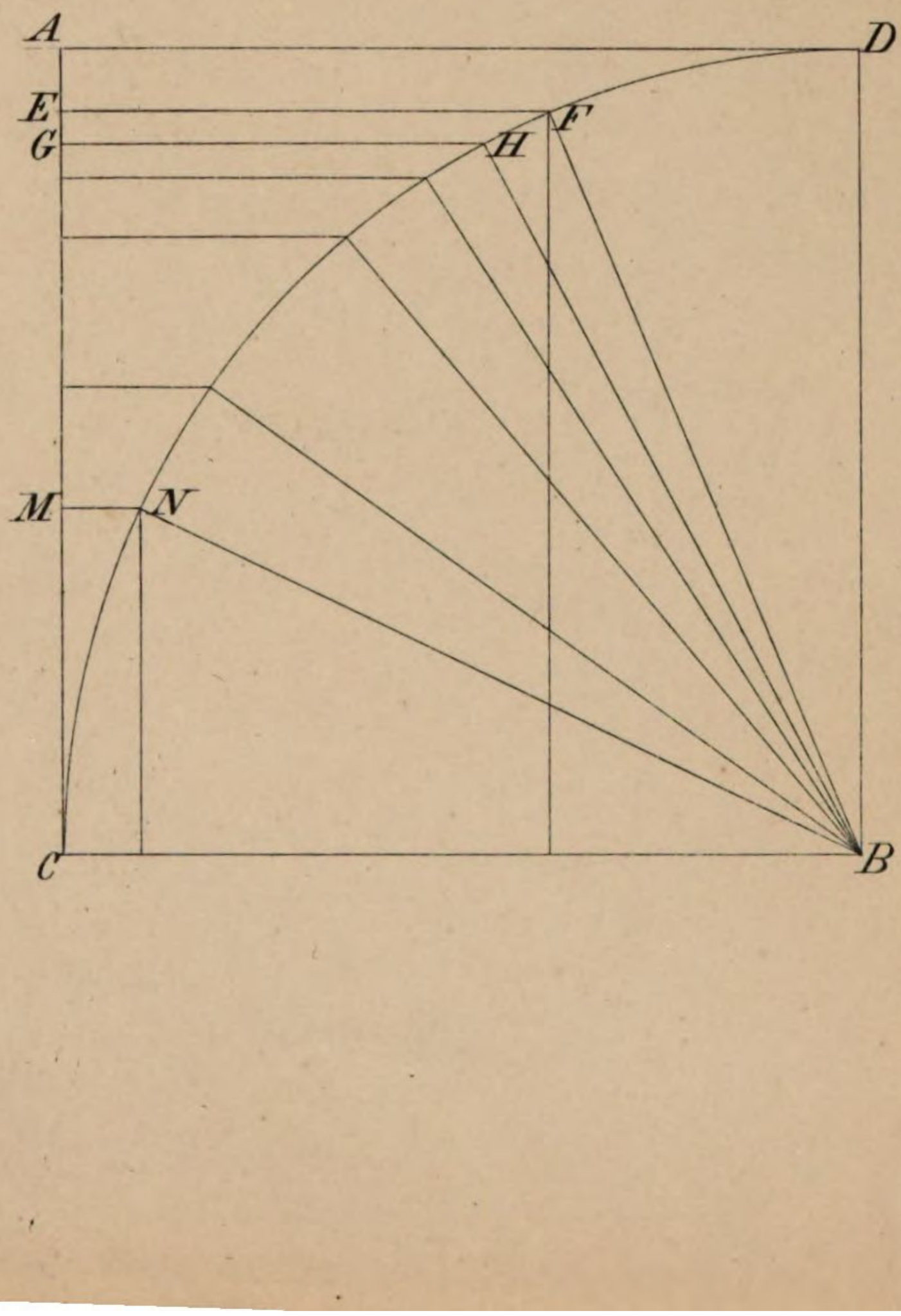


XXXVII.



XXXVIII.





Halle, Buchdruckerei des Waisenhauses.

Zettler

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Goebel, Karl

Über Keplers astronomische Anschauungen und Forschungen ein Beitrag zur Entdeckungsgeschichte seiner Gesetze

Halle 1871

Astr.u. 67 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10998855-2